Achter Artikel.

Über die Parallelentheorie und über die nichteuklidischen Geometrien

von R. Bonola in Pavia.

Die gewöhnliche Lehre von den Parallelen beruht außer auf den ersten Postulaten der Bestimmung [Verknüpfung], Teilung [Anordnung] (vgl. Art. 3) und der Kongruenz (vgl. Art. 4) auf einem spezifischen Postulat, das Euklid (330–275 v. Chr.) in folgender Form aussprach:

Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Aus dem Postulat ergeben sich unmittelbar:

a) die Umkehrungen der ersten Sätze über die Parallelen;

b) der Satz über die Summe der Winkel eines Dreiecks;

c) die Existenz ähnlicher Figuren.

Die Natur und die wenig anschauliche Form des Postulats gaben einem Problem Entstehung, mit dem wohl durch zwei Jahrtausende hindurch die Geometer sich abmühten, nämlich dem Problem eines Beweises für das Parallelenpostulat, das sonst auch fünftes Postulat oder Postulat von Euklid genannt wird.

In dem ersten Teil des vorliegenden Artikels beabsichtigen wir, kurz die Geschichte der bemerkenswertesten Arten von Stellungnahme zu unserem Problem zu verfolgen, die von den ersten Beweisversuchen des Postulats, die uns von den Griechen überliefert sind, bis zur Gewinnung der Überzeugung seiner Unbeweisbarkeit und bis zu den modernen Anschauungen gehen, die in dieser Unbeweisbarkeit ihren Ursprung hatten.

In dem zweiten Teile, der konstruktiven Charakters ist, werden wir in kurzen Zügen die grundlegenden Sätze der beiden geometrischen Gebäude darlegen, die auf der Negierung des fünften Postulats aufgebaut sind und unter den Benennungen der nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie und der nichteuklidischen elliptischen Geometrie bekannt sind.

Erster Teil.

Geschichte der Untersuchungen über die Parallelen.

§ 1. Das Parallelenpostulat bei den Griechen. Wie wir oben sagten, gehen die ersten Beweisversuche auf die Griechen zurück und Proklus (410—485) überliefert uns in seinem wertvollen *Kommentar zu dem ersten Buche Euklids* zusammen mit den Bemerkungen und Erörterungen von Posidonius (1. Jahrhundert v. Chr.), Geminus (1. Jahrhundert v. Chr.), Ptolemäus (87—165) die eigenen kritischen Bemerkungen und seinen Beweis des fünften Postulats.

Bei Posidonius und Geminus erkennen wir das Bestreben, die Euklidische Definition der Parallelen [sich nicht schneidende Geraden derselben Ebene] durch eine andere von nicht negativer grammatischer Form zu ersetzen, die sich auf den Begriff des gleichen Abstandes gründet; bei Ptolemäus und Proklus die stillschweigende Einführung eines neuen Postulats, aus dem man das von Euklid logisch ableiten kann.

Indem wir das von Ptolemäus mit Stillschweigen übergehen, da es ohne Interesse ist, bemerken wir, daß das Postulat von Proklus teils ausgesprochenermaßen, teils stillschweigend behauptet, daß der Abstand zweier sich scheidenden Geraden um beliebig viel wächst, wenn man die beiden Geraden hinreichend verlängert, während der Abstand zweier Parallelen endlich bleibt. Hieraus folgert man, daß durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele geht, und dann Schritt für Schritt durch bekannte Schlußfolgerungen das Euklidische Postulat.

Einem anderen bemerkenswerten, von den Griechen verwirklichten Schritt können wir in dem Versuche von Aganis (6. Jahrhundert) nachgehen. Aganis kann, indem er von der Voraussetzung, daß es Geraden gleichen Abstandes gibt, ausgeht, den gemeinsamen Punkt zweier Geraden AE, DZ konstruieren (Fig. 80), von denen die eine senkrecht, die andere schief zu ihrer gemeinsamen Transversale EZ ist. Zu dem Zwecke fixiert er auf DZ einen Punkt T, von dem man die Senkrechte TL auf EZ fällt. Dann halbiert man EZ im Punkte P,

darauf auch PZ im Punkte M usw., bis einer der Punkte $P, M \ldots$ in die Strecke LZ fällt. Wenn dies z. B. der Punkt M ist, so errichtet man in M die Senkrechte auf EZ, die DZ in einem Punkte N schneidet. Endlich konstruiert man die Strecke ZC als ein solches Vielfaches von ZN, wie EZ Vielfaches von MZ ist. In unserer Figur setzen wir $EZ = 4MZ$ voraus, so daß $CZ = 4NZ$ ist. Der Punkt C ist der gemeinsame Punkt der Geraden AE, DZ.

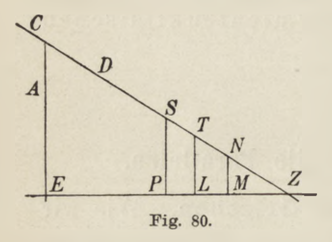


Fig. 80.

Um das zu beweisen, würde es genügen, zu zeigen, daß aufeinanderfolgende und gleiche Strecken auf der Geraden ZD wie ZN, $NS \ldots$ gleiche Projektionen auf ZE haben, eine Sache, die leicht aus der Voraussetzung folgt, daß es Geraden gleichen Abstandes gibt.

Wir ersehen, daß Aganis in seiner Konstruktion von dem sogenannten Postulat des Archimedes Gebrauch macht, um die Strecke MZ zu bestimmen, die ein aliquoter Teil von EZ und kleiner als LZ ist.

§ 2. Das Parallelenpostulat bei den Arabern Die „*Elemente Euklids*" waren Gegenstand mehrerer arabischer Übersetzungen mit Kommentar. Eine der berühmtesten, die des persischen Geometers Nasîr-Eddin (1201—1274), besitzt für uns ein großes Interesse, da sie einen Versuch enthält, das fünfte Postulat zu beweisen. Der Beweis von Nasîr-Eddin hat nach Aussage von Wallis (vgl. S. 251) die typische Form derartiger Untersuchungen bei den Arabern, die, während sie Euklid den Inhalt seines Postulats nicht zugeben wollen, verlangten, daß man ihnen irgendeine andere Hypothese zugibt, um aus dieser in scharfsinniger Weise die Wahrheit der Euklidischen abzuleiten.

Nasîr-Eddin nimmt als unmittelbar klar einen langen Satz an, dessen wesentlicher Teil behauptet, daß, wenn von zwei Geraden r und s die erste senkrecht, die zweite schief zu einer Strecke AB ist, die Strecken der Senkrechten, die von s auf r gefällt werden, kleiner als AB auf der Seite sind, auf der AB mit s einen spitzen Winkel bildet. Es folgt unmittelbar, daß, wenn zwei gleiche Strecken AB, $A'B'$ auf dieselbe Seite fallen und senkrecht auf der Geraden BB' sind, die Gerade AA' auch senkrecht zu den beiden gegebenen Strecken sein wird. Außerdem wird man $AA' = BB'$ haben, d. h. die Figur $AA'BB'$ ist ein Viereck mit rechten Winkeln und gleichen gegenüberliegenden Seiten, also ein Rechteck.

Aus diesem Ergebnis folgert Nasîr-Eddin leicht, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln ist. Für das rechtwinklige Dreieck ist die Sache offenbar, da es die Hälfte eines Rechtecks ist; für ein beliebiges Dreieck erreicht man das Ziel durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke. Nachdem dies vorausgeschickt ist, beweist der arabische Geometer das Euklidische Postulat, indem er sich zuerst auf den besonderen Fall von zwei Geraden bezieht, von denen die eine senkrecht, die andere schief zu einer gemeinsamen Transversale ist, und zwar zunächst durch eine Schlußfolgerung, die der von Aganis ähnlich ist, und dann im allgemeinen Falle, indem er sich des Satzes über die Summe der Winkel eines Dreiecks bedient.

§ 3. Das Parallelenpostulat während der Renaissance und des XVII. Jahrhunderts. Wie es bekannt ist, wurden die ersten lateinischen Übersetzungen der *Elemente Euklids*, die auf das 12. und 13. Jahrhundert zurückgehen, nach arabischen Texten kompiliert; sie enthalten aber keine kritische Bemerkung zum fünften Postulat. Dasselbe gilt für die nach griechischen Texten am Ende des 15. und in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts hergestellten Übersetzungen. Die Kritik ersteht seit 1550 wieder, hauptsächlich durch Anregung des Kommentars von Proklus.

Die Kommentatoren dieser Periode [1550—1650] gehen mit Ausnahme von Cataldi, der in einem ganzen Werkchen die Existenz von Geraden gleichen Abstandes zu beweisen sucht, von der Hypothese aus, daß es derartige Geraden gibt, wobei sie zuweilen diese Hypothese durch entsprechende Schlußfolgerungen zu rechtfertigen suchen.

Ein anderer Kommentator, der auch die Idee der Geraden gleichen Abstandes verwertet, ist Giordano Vitale (1633—1711).

Der Versuch Giordanos ist, obwohl er einen grundlegenden Fehler enthält, der seinen Schlußfolgerungen jeden Wert nimmt, trotzdem interessant, weil er die hinreichenden Bedingungen für die Existenz zweier Geraden gleichen Abstandes auf das Minimum reduziert. Berühren wir kurz diesen Teil seiner Schlußweise.

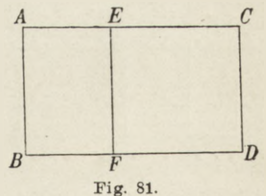


Fig. 81.

Wenn in dem Viereck $ABCD$ die Winkel $\widehat{B}, \widehat{D}$ rechte und die gegenüberliegenden Seiten AB, CD gleich sind, so ist klar, daß auch die andern beiden Winkel $\widehat{A}, \widehat{C}$ untereinander gleich sein werden.

Man setze nun voraus, daß die Strecke EF, die von einem Punkte E auf AC senkrecht nach BD gefällt wird, den beiden Strecken AB, CD gleich ist. Es ergeben sich dann offenbar die folgenden Winkelgleichungen:

$$\widehat{BAE} = \widehat{AEF}; \quad \widehat{FEC} = \widehat{ECD}.$$

Aber da die beiden Winkel $\widehat{BAE}$, $\widehat{ECD}$ untereinander gleich sind, so werden auch die Winkel $\widehat{AEF}$, $\widehat{FEC}$ gleich sein. Und da diese letzten beiden Komplementwinkel sind, so wird jeder von ihnen ein rechter sein und demgemäß alle obengenannten Winkel. Hiernach führt die Annahme, daß EF gleich AB ist, zu der Schlußfolgerung, daß die Figur $ABCD$ vier rechte Winkel hat.

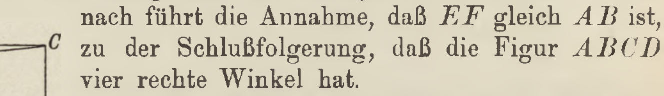


Fig. 82.

Es sei nun (Fig. 82) G ein beliebiger zwischen A und C liegender Punkt der Geraden AC. Wenn die Senkrechte GH, die man auf BD fällt, nicht gleich AB wäre, so würde sie kleiner oder größer sein. Setzen wir z. B. $GH > AB$. Alsdann nehme man auf GH die Strecke JH gleich AB an und verbinde J mit den Punkten A und C. Wir werden alsdann die folgenden Gleichungen zwischen den Winkeln haben:

$$(1) \qquad \widehat{BAJ} = \widehat{AJH}; \quad \widehat{HJC} = \widehat{JCD}.$$

Und da die beiden Winkel $\widehat{BAJ}$, $\widehat{JCD}$ beide spitze sind, so wird die Summe $\widehat{AJH} + \widehat{HJC}$ kleiner als zwei rechte Winkel sein. Andererseits werden wir infolge des Satzes vom Außenwinkel eines Dreiecks (Euklid I, 16) haben:

$$\widehat{AGH} < \widehat{AJH}; \quad \widehat{HGC} < \widehat{HJC},$$

hieraus, wenn wir Glied für Glied summieren:

$$\widehat{AGH} + \widehat{HGC} < \widehat{AJH} + \widehat{HJC};$$

oder was dasselbe ausmacht:

$$2 \text{ rechte Winkel} < \widehat{AJH} + \widehat{HJC}.$$

Diese Beziehung widerspricht der vorhergehenden:

$$\widehat{AJH} + \widehat{HJC} < 2 \text{ rechte Winkel}.$$

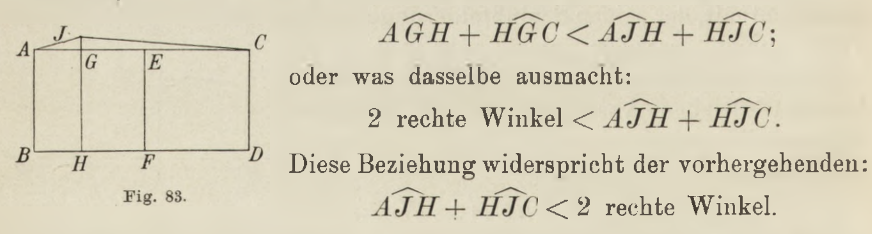


Fig. 83.

Es folgt hieraus, daß GH nicht größer als AB sein kann. Analog erweist man die Annahme $GH < AB$ als unmöglich (Fig. 83); also ergibt sich $GH = AB$.

Bei dieser Schlußfolgerung bezieht sich Giordano ausdrücklich auf den Fall, in dem der Punkt G der Strecke AC angehört. Man kann den Beweis leicht für den Fall der Annahme, in der G auf der Verlängerung von AC, z. B. nach rechts, liegt, vervollständigen.

Wir folgern ähnlich wie oben, wenn man $GH < AB$ und $JH = AB$ voraussetzt. Zunächst werden wir die Gleichungen (1) ableiten. Aber nach dem Satz vom Außenwinkel haben wir $\widehat{JAC} < JCG$, also $\widehat{BAJ} < \widehat{JCD}$ oder auch infolge von (1)

$$\widehat{AJH} < HJC.$$

Aber aus der direkten Prüfung der Figur ergibt sich umgekehrt:

$$\widehat{AJH} > \widehat{HJC},$$

so daß die Annahme $GH < AB$ fällt; also ergibt sich $GH = AB$.

Wir schließen: Wenn drei Punkte A, G, C einer Geraden AC von der Geraden BD gleichen Abstand haben, so werden die beiden Geraden AC, BD Linien gleichen Abstands sein. Dies ist das Ergebnis von Giordano, auf das wir die Aufmerksamkeit lenken wollten.

Eine beachtenswerte Bemerkung über den bewiesenen Satz ist die folgende: Wenn in dem Viereck $ABFE$ die Seite AB gleich EF ist, so wird auch der Winkel in F ein rechter sein. Es ergibt sich dann unmittelbar $AE = BF$. Demgemäß wird man, wenn man die oben in dem Viereck $BDCA$ benutzten Schlußfolgerungen auf das rechtwinklige Viereck $ABFE$ anwendet, in dem man AB als Basis nimmt, schließen können, daß auch die Geraden AB und EF gleichen Abstand haben. Und da die Strecke BF beliebig ist, so werden wir haben, daß es nach der Hypothese von Giordano Paare von Geraden gleichen Abstandes gibt, einem beliebigen vorher bestimmten Abstande entsprechend.

Einen Beweis des Euklidischen Postulats, der sich auf Kriterien gründet, die von den vorhergehend dargelegten wohl unterschieden sind, verdankt man dem englischen Geometer J. Wallis (1616–1703).

Die neue Idee, die wir Wallis verdanken, besteht darin, daß er an Stelle des fünften Postulats die Existenz eines Dreiecks voraussetzt, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist und eine beliebige Größe hat, eine Idee, die er durch Analogie mit dem Falle des Kreises (vgl. Euklid, III. Postulat[1])) zu rechtfertigen sucht.

Die von Wallis befolgte Methode, die Frage zu lösen, kann viel-

1) Das dritte Postulat von Euklid sagt in der Tat aus: Um einen beliebigen Punkt und mit beliebigem Abstand kann man einen Kreis beschreiben.

leicht auf den ersten Blick ausreichend erscheinen, insofern unsere Anschauung die Existenz von Figuren, die von gleicher Gestalt und dabei nicht gleich ausgedehnt sind, zu bezeugen scheint; aber im Grunde ist der Begriff der von der Größe unabhängigen Gestalt, abgesehen davon, daß sie im ganzen mit der in der fünften Hypothese von Euklid erklärten gleichwertig ist, zu sehr zusammengesetzt, als daß er passenderweise in das Gewand eines Postulats gekleidet werden könnte.

Die Gleichwertigkeit des Postulats von Wallis mit dem von Euklid beweist uns, daß es, wenn ein geometrisches System, das von der Euklidischen Hypothese absieht, möglich ist, in diesem System nicht ähnliche Figuren geben kann, und daß in ihm die Größe einer jeden Figur innig mit der ihrer Winkel verbunden sein wird.

§ 4. Zusammenfassung. Aus dem, was vorangeht, ergibt sich also:

1. daß auf die von Euklid im fünften Postulat verdeckte Schwierigkeit von den Griechen hingewiesen wurde;

2. daß die Griechen sie zu heben suchten, indem sie an die Stelle des Postulats irgendeine andere Annahme setzten, die für einfacher oder für anschaulicher gehalten wurde (insbesondere die Annahme der Existenz von Geraden gleichen Abstandes);

3. daß die Araber wesentliche Beiträge zu dem Problem nicht lieferten, weil der typische Beweis von Nasîr-Eddin zum großen Teil nach dem von Aganis geformt ist;

4. daß die Hypothese über die Existenz von Geraden gleichen Abstandes unter mannigfachen Formen auch von den Kommentatoren der Renaissance bevorzugt wurde und nachher von Giordano Vitale vereinfacht wurde;

5. daß man nach J. Wallis den Beweis für das Postulat von Euklid leicht erhalten kann, wenn man zu jedem gegebenen Dreieck die Existenz von ähnlichen Dreiecken annimmt.

Schließlich bemerken wir, daß sowohl die Hypothese von Giordano als auch die von Wallis weiter vereinfacht werden kann. Die Vereinfachung der Hypothese von Giordano besteht darin, nur für zwei besondere Geraden die Beziehung $AB = EF = CD$ anzunehmen; dies ergibt sich aus dem, was wir auf S. 250 sagten. Die Vereinfachung der Hypothese von Wallis, die nach und nach von Saccheri (vgl. § 5) vorgenommen wurde, besagt, daß man nicht notwendig zu jedem Dreieck ein ähnliches von beliebiger Größe konstruieren können muß, sondern daß allein die Existenz zweier ähnlichen und voneinander verschiedenen Dreiecke genügt.

§ 5. Die Leistung von Gerolamo Saccheri. Mit Saccheri (1667—1733) änderte sich die Richtung der Untersuchungen über unser Postulat vollständig. Als tiefer Kenner des Gegenstandes und der verschiedenen Versuche, die von seinen Vorgängern gemacht sind, versucht er es, das Ziel zu erreichen, indem er logische Widersprüche im Innern einer Geometrie sucht, die auf Grund der ersten 26 Euklidischen Sätze und auf Grund der Negierung des fünften Postulats entwickelt werden kann. Der Versuch von Saccheri ist also ein indirektes Beweisverfahren.

Hier ein flüchtiger Überblick über seinen „*Euclides ab omni naevo vindicatus; sive geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia.*“ [1])

Es sei $ABCD$ ein ebenes Viereck, in dem die gegenüberliegenden Seiten AD, BC gleich und zur Grundlinie AB senkrecht sind. Wenn man von anfang an die Frage der Richtigkeit oder Nichtrichtigkeit des fünften Postulats offen lassen will, so bieten sich drei Hypothesen über die weiteren Winkel D, C des Vierecks dar. Sie können beide rechte (Hypothese rechter Winkel), beide stumpfe (Hypothese stumpfer Winkel), beide spitze (Hypothese spitzer Winkel) sein.

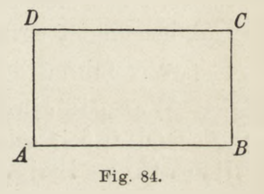


Fig. 84.

Im ersten Falle ist die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten. Alsdann kann Saccheri durch ein Schlußverfahren, das dem von Nasîr-Eddin ähnlich ist, und mit Hilfe des Postulats von Archimedes die Gültigkeit des fünften Postulats streng beweisen.

Im zweiten Falle ist die Summe der Winkel eines Dreiecks größer als zwei rechte Winkel. Alsdann gelingt es, wenn man stillschweigend die Hypothese benutzt, daß die Gerade unendlich lang ist, auch in diesem Falle die Gültigkeit des Postulats zu beweisen. Aber aus diesem Postulat folgt, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist, so daß die Hypothese des stumpfen Winkels, da sie sich selbst aufhebt, verworfen werden muß.

Im dritten Falle ist die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner als zwei Rechte. Um zu versuchen, auch die Hypothese des spitzen Winkels zu widerlegen, entwickelt Saccheri verschiedene Sätze, von denen aus er, wenn er auf dem rein deduktiven Gebiet geblieben wäre, den logischen Widerspruch, auf dessen Suche

1) Vergl. Engel und Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß*, Leipzig 1895.

er war, nicht erhalten haben würde. Aber so stark und so eingewurzelt war die Idee von der Unmöglichkeit, daß man das Euklidische Postulat nicht sollte beweisen können, daß Saccheri wie alle seine Vorgänger seinem Gebäude ein anschauliches Datum zufügte.

Dies Datum besagt, daß es nicht zwei asymptotische Geraden geben kann, d. h. zwei Geraden, die sich unbegrenzt nähern, ohne sich zu treffen. Mit Hilfe dieser Hypothese, die viel weniger anschaulich ist als so viele andere, die vorher von anderen Forschern benutzt worden waren, kann er die dritte Hypothese als falsch nachweisen. In dieser Weise glaubt Saccheri, da nur die erste Hypothese als möglich übrig bleibt, das Postulat von Euklid bewiesen zu haben.

Die Wichtigkeit der Saccherischen Arbeit darf nicht in dem Schluß gesucht werden, zu dem er gelangt, sondern vielmehr in einer Gruppe von Sätzen, die, mit wunderbarem geometrischen Instinkt entwickelt, den ersten Stein zu einem Gebäude bilden, das vom Postulate Euklids unabhängig ist.

Wir führen die wichtigsten an.

Wenn in einem einzigen Falle die Hypothese des rechten, des stumpfen oder des spitzen Winkels wahr ist, so ist die Hypothese in jedem andern Falle wahr.

Je nachdem man die Hypothese des rechten, stumpfen oder spitzen Winkels bewahrheitet findet, ist die Summe der Winkel eines Dreiecks beziehungsweise gleich, größer, kleiner als zwei rechte Winkel und umgekehrt.

Eine unmittelbare Folgerung, die sich aus den vorgenannten Sätzen ergibt, ist die folgende:

Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel ist, so ist in jedem andern Dreieck die in Rede stehende Summe gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel.

Beachtenswert sind auch die folgenden Sätze, die Saccheri aus der Hypothese des spitzen Winkels ableitet.

Bei der Hypothese des spitzen Winkels gilt folgendes:

a) Es gibt zu einer Geraden eine senkrechte und eine schiefe Gerade, die sich nicht treffen;

b) alle Geraden eines Büschels können in bezug auf eine Gerade a, die mit dem Büschel einer Ebene angehört, in zwei Gruppen klassifiziert werden: 1. Geraden, die mit a nicht eine gemeinsame Senkrechte besitzen und a schneiden;

2. Geraden, die mit a eine gemeinsame Senkrechte besitzen und a nicht treffen. Diese letzten werden von den ersten durch zwei zu a asymptotische Geraden p, q getrennt.

Diese Sätze, die von Saccheri in der Absicht, seine dritte Hypothese als falsch nachzuweisen, entwickelt wurden, werden ungefähr in einem Jahrhundert wiedergefunden werden und werden die grundlegenden Sätze sein, auf denen andere Geometer ein geometrisches System aufbauen werden, das sich auf die Negation des Postulats von Euklid gründet.

§ 6. Die Leistung von Lambert. Welchen Einfluß die Untersuchungen Saccheris auf die Geometer des 18. Jahrhunderts ausgeübt haben, kann man nicht genau feststellen; indessen ist es wahrscheinlich, daß der Schweizer Geometer J. H. Lambert (1728—1777) sie kannte, weil er in seiner *„Theorie der Parallellinien"* (1766) eine Arbeit von G. S. Klügel (1739—1812) anführt, in der die Arbeit des italienischen Geometers bis ins Kleinste analysiert ist.

Die *„Theorie der Parallellinien"* von Lambert, die im Jahre 1786 nach dem Tode des Verfassers auf Veranlassung von G. Bernoulli und C. F. Hindenburg (1741—1808) veröffentlicht wurde, zerfällt in drei Teile. Der erste, kritischer und philosophischer Natur, gibt einen Hinweis auf die zweifache Frage, die man sich hinsichtlich des fünften Postulats vorlegen kann, nämlich ob es einfach mit Hilfe der vorhergehenden Postulate oder aber mit (notwendiger) Hilfe von anderen, die größere Evidenz besitzen, bewiesen werden kann. Der zweite Teil ist der Darlegung der mannigfachen Versuche gewidmet, in denen das Euklidische Postulat auf die einfachsten Sätze zurückgeführt wird, die aber ihrerseits bewiesen werden müßten. Der dritte, der wichtigste, enthält ein System von Untersuchungen, die denen des Pater Saccheri ähnlich sind.

Die grundlegende Figur Lamberts ist ein Viereck mit drei rechten Winkeln, und es werden über den vierten Winkel die drei Hypothesen aufgestellt. Die erste ist die Hypothese des rechten Winkels, die zweite ist die Hypothese des stumpfen Winkels, die dritte ist die Hypothese des spitzen Winkels. Auch in der Behandlung dieser Hypothesen kommt der Verfasser der Saccherischen Methode nahe.[1])

---

1) Zu bemerken ist jedoch, daß die Beweise Lamberts meist Stetigkeitsbetrachtungen, die bei Saccheri eine große Rolle spielen, ausschließen oder doch leicht in solche ohne Stetigkeitsbetrachtungen umgeformt werden können.

Die erste Hypothese führt leicht zum Beweise des Euklidischen Postulats.

Die zweite Hypothese wird mit Hilfe des Postulats von Archimedes widerlegt.

Die dritte Hypothese, die der des spitzen Winkels von Saccheri entspricht, führt Lambert nicht zu irgend einem logischen Widerspruch.

Ein bemerkenswertes Ergebnis, das Lambert denen, die schon Saccheri bei dieser Hypothese erhalten hatte, hinzufügt, bezieht sich auf die Flächen der Vielecke. Nennen wir Defekt eines Dreiecks die Differenz zwischen zwei rechten Winkeln und der Summe seiner Winkel, so ergeben sich die Flächen der Dreiecke als ihren bezüglichen Defekten proportional. Dieser Satz gilt auch für Vielecke.

Eine andere bemerkenswerte Entdeckung von Lambert, die sich auf das Messen der geometrischen Größen bezieht, besteht in folgendem. Während in der gewöhnlichen Geometrie dem Messen der Strecken nur ein relativer, auf die Wahl einer besonderen Einheit bezüglicher Sinn zukommt, kann man ihm dagegen in der Geometrie, die sich auf die dritte Hypothese gründet, einen absoluten Sinn beilegen.

Es ist indes notwendig, die Unterscheidung, die zwischen absolut und relativ besteht, klarzulegen. In vielen Fragen trifft es zu, daß man die Elemente, die man als gegeben voraussetzt, in der Weise in zwei Gruppen zerlegen kann, daß diejenigen der ersten Gruppe in dem ganzen Gebiet unserer Betrachtungen fest bleiben, während man diejenigen der zweiten Gruppe in einer Vielfachheit von möglichen Fällen variieren kann.

Wenn das zutrifft, pflegt man die ausdrückliche Erwähnung der Daten der ersten Gruppe zu unterlassen und alles, was von den veränderlichen Daten abhängt, als relativ, alles, was nur von den festen Daten abhängt, als absolut anzusehen.

Dies trifft gerade in der Geometrie zu. In jeder konkreten Untersuchung setzt man im allgemeinen gewisse Figuren und demgemäß die Größe ihrer Elemente als gegeben voraus; aber außer diesen veränderlichen Daten (der zweiten Gruppe), die in beliebiger Weise gewählt werden können, ist immer stillschweigend die Hinzufügung der grundlegenden Figuren: Geraden, Ebenen, Büschel usw. (feste Daten oder Daten der ersten Gruppe) vorausgesetzt. Alsdann muß jede Konstruktion, jedes Messen, jede Eigenschaft einer beliebigen Figur für relativ gehalten werden, wenn sie sich im wesentlichen auf die veränderlichen Daten bezieht; dagegen wird sie absolut genannt werden können, wenn sie sich nur auf die festen Daten (grund-

legenden Figuren) bezieht, oder auch, wenn sie, in bezug auf veränderliche Daten ausgesprochen, von ihnen nur scheinbar abhängt, so daß sie bei deren Änderungen unverändert bleibt.

In diesem Sinne ist klar, daß in der gewöhnlichen Geometrie das Messen der Strecken notwendigerweise nur relative Bedeutung hat. In der Tat gestattet uns die Existenz der Ähnlichkeitstransformationen nicht, in irgend einer Weise die Größe einer Strecke in bezug auf die grundlegenden Figuren (Gerade, Büschel usw.) für sich allein festzulegen.

Für den Winkel dagegen kann man eine Art Maß wählen, das von ihm eine absolute Eigenschaft ausdrückt: es genügt in der Tat, sein Verhältnis zum Winkel eines Umlaufs, d. h. eines ganzen Büschels, zu nehmen, das eine der grundlegenden Figuren ist.

Wir kehren nun zu Lambert, zu seiner Geometrie, die der dritten Hypothese entspricht, zurück. Er hat bemerkt, daß man jeder Strecke einen bestimmten leicht konstruierbaren Winkel entsprechen lassen kann. Es folgt hieraus, daß jede Strecke zu der grundlegenden Figur des Büschels in Beziehung steht, und daß man demgemäß in der neuen (hypothetischen) Geometrie auch dem Messen der Strecken notwendig einen absoluten Sinn wird beilegen können.

Aber unsere Raumanschauung scheint uns zu bezeugen, daß das Messen der Strecken nur relative Bedeutung haben kann, so daß wir, wenn wir uns auf diese Anschauung, die in einem geeigneten Postulat formuliert werden könnte, stützen, mit Lambert die dritte Hypothese für falsch erklären könnten.

Noch andere sehr interessante Dinge sind in der „*Theorie der Parallelen*“ enthalten; z. B. die Verwandtschaft, die, wenn die zweite Hypothese erlaubt wäre, zwischen der ebenen Geometrie und der Kugelgeometrie bestehen würde, und die Bemerkung über die Unabhängigkeit dieser letzten vom Parallelenpostulat. Indem er dann auf die dritte Hypothese eingeht, sprach er folgende scharfsinnige und eigenartige Ansicht aus: „Ich sollte daraus fast den Schluß ziehen, die dritte Hypothese komme bei einer imaginären Kugelfläche vor“.

Zu dieser Art, die Dinge anzusehen, wurde er vielleicht durch die Formel: $R^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi)$ geführt, welche die Fläche eines sphärischen Dreiecks ausdrückt, weil sie, wenn man in ihr den Radius R in den imaginären Radius iR verwandelt,

$$R^2(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C})$$

wird; das ist die Formel für die Fläche eines ebenen Dreiecks bei der dritten Hypothese von Lambert.

Schließlich läßt Lambert die Frage unentschieden; überdies läßt der Umstand, daß er seine Untersuchungen nicht veröffentlicht hat, vermuten, daß er sich irgend einen neuen Gesichtspunkt vorgetäuscht hat.

Inzwischen kann man wohl bemerken, daß man wegen des allgemeinen Mißerfolgs derartiger Untersuchungen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts dazu kam, sich die Überzeugung von der Notwendigkeit zu bilden, das Euklidische Postulat oder irgend eine andere Hypothese, von der es abgeleitet werden könnte, ohne Beweis anzunehmen. Eine derartige Resignation unserer Frage gegenüber findet sich sehr klar in der Abhandlung von Klügel ausgedrückt, die wir im Anfange von § 5 erwähnt haben. Klügel läßt, nachdem er mit kritischem Verständnis ungefähr dreißig Beweise des Euklidischen Postulats geprüft hat, in seinem *„Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio“* die Möglichkeit hervortreten, daß das Postulat unbeweisbar ist, und weist auf die Tatsache hin, daß die Überzeugung von der Wahrheit der Euklidischen Hypothese für uns nicht die Frucht strenger Deduktionen, sondern vielmehr die experimenteller Ergebnisse sei.

So sehr nun auch die Untersuchungen von Saccheri und Lambert dazu führen, diese Ansicht zu stützen, so ist es doch nicht möglich, auf ihrer Grundlage auf die Unbeweisbarkeit des Postulats zu schließen, insofern man annehmen könnte, daß man bei einer Weiterführung der Untersuchungen schließlich doch auf einen Widerspruch zwischen den Folgerungen der dritten Hypothese von Saccheri und den ersten Prinzipien der Geometrie stoßen könnte.

§ 7. Die Leistung von Legendre. Die Kritik der Parallelentheorie, die in Italien und in Deutschland schon zu Ergebnissen von so hohem Interesse geführt hatte, erhielt gegen das Ende des 18. Jahrhunderts auch in Frankreich einen bemerkenswerten Impuls. Es genüge, daran zu erinnern, daß Fourier (1768—1830) zur Vervollkommnung der genannten Theorie eine neue Definition der Geraden und der Ebene vorschlug, daß Lagrange (1736—1813) die Unabhängigkeit der sphärischen Trigonometrie vom fünften Postulat bemerkte, daß Carnot (1753—1823) und Laplace (1749—1827), wie schon Wallis, die Idee betonten, die Hypothese von Euklid durch die zu ersetzen, welche die Existenz ähnlicher Figuren ausdrückt, daß endlich A. M. Legendre (1752—1833) mit seinen zahlreichen und wechselnden Versuchen, die alte Schwierigkeit zu beseitigen, in der wirkungsvollsten Weise dazu beitrug, das Interesse der Geometer für die Parallelenfrage lebendig zu erhalten.

Die hauptsächlichsten Ergebnisse, die von Legendre im Laufe seiner Untersuchungen erhalten wurden, bieten, wenn sie auch in den Arbeiten von Saccheri und Lambert enthalten sind, gleichwohl ein bemerkenswertes Interesse dar, wenn nicht anders, so doch durch die Schnelligkeit und die Eleganz, mit der sie erlangt wurden. Um demgemäß in klarster Weise den Zustand der Dinge im Anfang des 19. Jahrhunderts zu kennzeichnen, wollen wir mit unbedeutenden Abänderungen in der Form diejenigen Resultate von Legendre wiedergeben, die uns am geeignetsten erscheinen, den Zustand zu beleuchten.

1. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist kleiner oder gleich zwei rechten Winkeln.

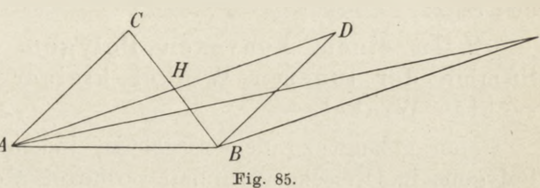


Fig. 85.

Man setze voraus, daß, wenn es möglich ist, $2R+\alpha$ die Summe der drei Winkel des Dreiecks ABC ist, das in A den kleinsten Winkel hat. Ist alsdann die Seite BC in H halbiert, so verbinde man A mit H und verlängere die Strecke AH um die gleiche Strecke HD. Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke AHC, BHD folgert man die Winkelgleichungen $\widehat{CAH}=\widehat{HDB}$, $\widehat{ACH}=\widehat{HBD}$; hieraus, daß in dem Dreieck ABD die Summe der Winkel auch $2R+\alpha$ beträgt und daß einer der beiden Winkel $\widehat{DAB}$, $\widehat{ADB}$, die zusammen den Winkel $\widehat{CAB}$ ausmachen, kleiner oder gleich der Hälfte dieses letzten sein wird.

Wenden wir auf das Dreieck ADB dieselben Konstruktionen und Schlußfolgerungen an, die für das ursprüngliche Dreieck gemacht sind, so werden wir ein neues Dreieck ableiten können, in dem ein Winkel kleiner oder gleich $\frac{\widehat{CAB}}{4}$ ist; und wenn wir so weitergehen, werden wir nach n Operationen zu einem Dreieck gelangen, in dem die Summe der Winkel $2R+\alpha$ beträgt und in dem einer kleiner oder gleich $\frac{\widehat{CAB}}{2^n}$ ist. Aber da für ein genügend großes n die Größe $\alpha>\frac{\widehat{CAB}}{2^n}$ ist, werden wir ein Dreieck erhalten, in dem zwei Winkel zusammen mehr als zwei Rechte betragen, was offenbar unmöglich ist. Also muß notwendigerweise $\alpha\leqq 0$ sein.

Man beachte, daß man bei der Feststellung des Satzes stillschweigend von der Eigenschaft der Geraden, unendlichlang zu

sein, Gebrauch macht, da man voraussetzt, eine Strecke AD nehmen zu können, die doppelt so groß ist wie eine beliebige Strecke AH. Wenn man von der Unendlichkeit der Geraden absehen wollte, würde der Satz Legendres hinfällig. Um uns hiervon zu überzeugen, gelte die sphärische Geometrie, in der die Ebene durch die Kugelfläche und die Gerade durch den größten Kreis ersetzt werde. Die Operation, eine Strecke zu verdoppeln, ist nicht möglich, wenn die Strecke größer als ein Halbkreis ist, und die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist größer als zwei Rechte.

Aus dem oben bewiesenen Satze folgert man dann unmittelbar den Satz:

2. In einem konvexen Polygon von n Seiten ist die Summe der inneren Winkel kleiner oder gleich $(2n-4)$ rechten Winkeln.

Man gelangt zu dem Ergebnis, indem man eine Zerlegung des Polygons in Dreiecke vornimmt vermittels Geraden, die von einem in seinem Innern gelegenen Punkte ausgehen.

Führt man dann der Kürze wegen das Wort Defekt ein, um anzugeben, um wieviel sich die Summe $\widehat{S}$ der Winkel eines konvexen Vielecks von $(2n-4)$ rechten Winkeln unterscheidet, indem man nämlich

$$\alpha = (2n-4)R - \widehat{S}$$

setzt, so erhalten wir den Satz:

In einem konvexen Vieleck ist der Defekt α größer als 0 oder gleich 0.

Außerdem folgt:

Der Defekt eines Dreiecks, das aus zwei anderen zusammengesetzt ist, ist der Summe der Defekte dieser beiden anderen gleich.

In der Tat, wenn $2R-\alpha$ die Summe der Winkel des einen der zusammensetzenden Dreiecke ist und $2R-\beta$ die des anderen, so ergibt sich als die Gesamtsumme der Dreieckswinkel

$$(2R-\alpha)+(2R-\beta)-2R = 2R-(\alpha+\beta).$$

3. Wenn die Summe der drei Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt, so betragen auch zwei Rechte die Summen der Winkel der Dreiecke, die man aus ihm vermittels Teilungen durch Geraden erhält, die von einer Ecke ausgehen.

Denn wenn in dem Dreieck ACD, das die Gerade CD von dem Dreieck ABC abschneidet, die Summe $2R - \alpha$ betrüge, so müßte in dem übrigbleibenden Dreieck DBC die Summe der drei Winkel $2R + \alpha$ betragen, was nach Satz 1) unmöglich ist.

4. Wenn in einem Dreieck die Summe der drei Winkel gleich zwei Rechten ist, so kann man immer ein Viereck mit vier rechten Winkeln konstruieren, dessen vier Seiten gleich und größer als jede angebbare Strecke sind.

Es sei ABC ein Dreieck mit dem Defekt Null. Dies Dreieck wollen wir als rechtwinklig und gleichschenklig voraussetzen, da wir, wenn es nicht so wäre, es immer mit Hilfe von Teilungen durch Geraden, die von den Ecken ausgehen, auf diesen Fall zurückführen können (Satz 3). Legen wir zwei derartige Dreiecke mit der Hypotenuse aneinander, so werden wir ein Viereck $ABCD$ mit vier rechten Winkeln und vier gleichen Seiten herstellen. Durch passende Vereinigung von vier ähnlichen Figuren ergibt sich ein neues Viereck $CEFG$, das dieselben Eigenschaften besitzt und dessen Seiten das Doppelte von denen des letzten sind.

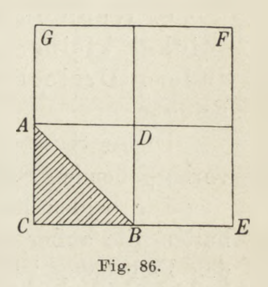


Fig. 86.

Wenn wir so weitergehen, werden wir nach n Operationen zu einer Figur mit vier rechten Winkeln und vier Seiten geführt werden, die untereinander gleich sind und von denen jede dem 2^n-fachen der Seite AC gleich ist. Deshalb übertrifft, wenn n genügend groß ist, die Seite des Vierecks, zu dem man gelangt, an Größe jede beliebig große Strecke.

Bemerkung. Die Diagonale zerlegt weiter ein derartiges Viereck in zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke vom Defekt Null; daher folgt aus der Existenz eines einzigen Dreiecks, in dem die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt, die Existenz eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks, in dem die Seiten eine angegebene Strecke übertreffen und in dem die Summe der Winkel auch zwei Rechte beträgt.

5. Wenn die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist, so ist auch die Summe der Winkel eines jeden andern Dreiecks gleich zwei Rechten.

Es wird genügen, den Satz für ein rechtwinkliges Dreieck zu beweisen, da jedes Dreieck immer in zwei zerlegt werden kann, die beide einen rechten Winkel haben.

Es sei also ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck. Wenn in einem Dreieck die Summe der drei Winkel zwei Rechte beträgt,

so werden wir nach dem vorhergehenden Satze ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck konstruieren können, das diese Eigenschaft besitzt und dessen Katheten diejenigen von ABC übertreffen. Man lege alsdann, wie es die Figur zeigt, die rechten Winkel der beiden Dreiecke aufeinander und wende zunächst auf das Dreieck $A_1 B_1 C_1$, dann auf das Dreieck $AB_1 C_1$ den Satz 3) an. Wir können alsdann folgern, daß im Dreieck $AB_1 C_1$ und demgemäß im Dreieck ABC die Summe der Winkel zwei Rechte beträgt.

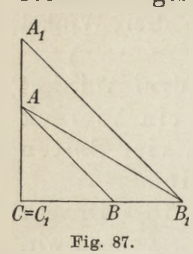


Fig. 87.

6. Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der drei Winkel kleiner als zwei Rechte ist, so ist auch in jedem andern Dreieck die Summe der Winkel kleiner als zwei Rechte.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes 1) und des vorhergehenden Satzes.

Die beiden letzten Sätze sind in den Sätzen von Saccheri enthalten, die außer den beiden von Legendre behandelten Fällen auch den Fall behandeln, in dem die Summe der Winkel eines Dreiecks mehr als zwei Rechte beträgt. Dieser letzte Fall kann in den Untersuchungen Legendres nicht erscheinen infolge seines ersten von uns angegebenen Satzes, des Satzes, der seine Grundlage in der Hypothese der Unendlichkeit der Geraden hat. Läßt man diese Hypothese fallen, so wird der in Frage stehende Satz hinfällig, und alsdann hat die Hypothese Saccheris vom stumpfen Winkel das Recht, neben den beiden anderen, die von Legendre untersucht worden sind, zu bestehen.

Wir sehen nun, welche Schlüsse für das Postulat von Euklid aus den oben entwickelten Sätzen gezogen werden können.

7. Wenn die Summe der drei Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist, so geht durch einen beliebigen Punkt der Ebene zu einer angegebenen Geraden eine einzige Parallele.

Zum Beweise dieses Satzes schicken wir voraus den folgenden

Hilfsatz. Es ist immer möglich durch einen Punkt P eine Gerade zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden r einen Winkel bildet, der kleiner als ein angegebener Winkel ist.

In der Tat, wenn (Fig. 88) Q der Fußpunkt des von P auf r gefällten Lotes heißt, so nehme man auf einem der beiden Strahlen, in die Q

die Gerade r zerlegt, eine Strecke $QR = PQ$ und man bezeichne mit ω den Winkel $PRQ = RPQ$. Dann konstruiere man ein Dreieck PRR_1, in dem der Winkel in R das Supplement von ω und $RR_1 = PR$ sei: die an PR_1 anliegenden Winkel sind gleich und übertreffen $\frac{\omega}{2}$ nicht. Gehen wir in derselben Weise weiter, so werden wir nach n Operationen zu einem Dreieck $PR_{n-1}R_n$ gelangen, in dem die Winkel in R_n und in P kleiner als $\frac{\omega}{2^n}$ oder diesem Werte gleich sein werden; wir werden demgemäß zu einer Geraden PR_n gelangen, die von P ausgeht und die Gerade r unter einem beliebig kleinen Winkel trifft.

Kehrt man nun zu dem ausgesprochenen Satze zurück und behält die Figur, von der wir für den Beweis des Hilfssatzes ausgegangen sind, so ziehe man Senkrechte s zu PQ von P aus. Jede Gerade, die von P ausgeht und r in R trifft, wird mit den beiden Geraden r und s gleiche korrespondierende Winkel bilden, weil in dem Dreieck PQR die Summe der drei Winkel nach Voraussetzung gleich zwei rechten Winkeln ist. Und da es nach dem festgestellten Hilfssatze immer möglich ist, durch P Geraden zu ziehen, die mit der Geraden r einen beliebig kleinen Winkel bilden, so folgt, daß alle Geraden durch P außer s die Gerade r treffen müssen; deshalb ist s die einzige Parallele, die man zu r durch P ziehen kann.

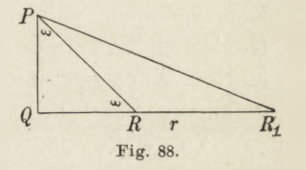


Fig. 88.

Schöpfung der nichteuklidischen Geometrie.

Elementare Richtung.

§ 8. Die Leistung von C. F. Gauß. Zwanzig Jahrhunderte unnützer Bemühungen und hauptsächlich die letzten fruchtlosen Untersuchungen über das fünfte Postulat führten viele Geometer, die am Beginn des verflossenen Jahrhunderts tätig waren, zu der Überzeugung, daß die endgültige Gestaltung der Parallelentheorie ein unlösbares Problem darstelle. Die Schule von Göttingen hatte seit 1763 offiziell die Notwendigkeit erklärt, sich nach der Euklidischen Hypothese zu richten, und diese Ansicht, die seitens Klügels in seinem „*Conatuum*“ zum Ausdruck gelangte, wurde geteilt und gestützt von seinem Lehrer A. G. Kästner (1719—1800), der damals an der Universität Göttingen Professor war. Nichtsdestoweniger war das Interesse für unsern Gegenstand immer lebendig. Wenn dies einerseits zu

neuen nicht schlüssigen Versuchen führte, so führte es andererseits zur Entdeckung neuer geometrischer Systeme, die sich, wenn sie auch ihre erste Grundlage in der Anschauung hatten, in einem umfassenderen Gebiete entwickelten, indem man von dem im Euklidischen Postulat enthaltenen Prinzip absah.

Die ganze Schwierigkeit, in die neue Ideenreihe einzutreten, wird dem offenbar, der sich in jene Zeit zurückversetzt und an die damals herrschende Anschauungsweise der Kantischen Philosophie denkt.

Es war Gauß (1777—1856) der erste, der eine klare Vorstellung von einer vom fünften Postulat unabhängigen Geometrie hatte; diese blieb durch gut fünfzig Jahre im Geiste des größten Geometers verschlossen und kam erst nach den Arbeiten von Lobatschefskij und F. Bolyai ans Licht.

Die Dokumente, die eine angenäherte Wiederherstellung der Gaußischen Untersuchungen über die Parallelen gestatten, sind die Korrespondenz von Gauß mit W. Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus, Bessel, zwei kleine Noten in den „Gött. gelehrten Anzeigen" und einige Bemerkungen, die in seinen Papieren gefunden sind (1831).

Vergleicht man die verschiedenen Stellen der Briefe von Gauß, so ist es möglich, in großen Zügen, zwei Perioden in der Geschichte seiner Untersuchungen zu zeichnen.

Die erste, die vom Jahre 1792 bis zu den ersten Jahren des 19. Jahrhunderts reicht, ist dem kritischen Studium des Gegenstandes und der Erforschung der Mittel gewidmet, die zum Beweise des fünften Postulats führen könnten, die zweite, die nach 1813 beginnt, der Entwicklung der grundlegenden Sätze einer neuen Geometrie, die von Gauß zuerst antieuklidische, dann nichteuklidische genannt wurde. Folgendes ist die von Gauß angenommene Definition der Parallelen:

Wenn die Gerade AM, die mit BN einer Ebene angehört, aber sie nicht schneidet, von der Eigenschaft ist, daß jede in dem Winkel BAM enthaltene durch A gehende Gerade die Gerade BN trifft, dann nennt man AM parallel zu BN.

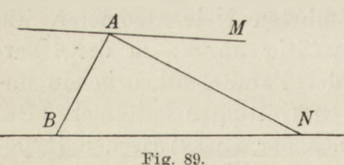


Fig. 89.

Man beachte den Unterschied dieser Definition und der Euklidischen. In der Tat würden, wenn man von dem fünften Postulat absieht, durch A andere von AM verschiedene Geraden gehen können, die mit BN nicht zusammentreffen, die nur auf Grund der alten Definition zu BN parallel sein würden.

Gauß hat dann bewiesen, daß für seine Parallelen die folgenden Sätze bestehen:

1. Wenn AM zu BN parallel ist, so ist umgekehrt BN zu AM parallel.

2. Zwei Geraden, die einer dritten parallel sind, sind untereinander parallel.

Und bei der Weiterentwicklung der neuen Geometrie hat dann Gauß den Satz von Lambert über die Proportionalität zwischen der Fläche und dem Defekt eines Vielecks erhalten, das Vorkommen einer unbestimmten Konstanten k in allen Formeln des neuen Systems, endlich die Länge des Kreises von dem Radius r unter der Form:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right).$$

In bezug auf k weist Gauß auf die Notwendigkeit hin, sie, um die neue Geometrie mit der Erfahrung in Übereinstimmung zu bringen, als außerordentlich groß vorauszusetzen.

§ 9. Die Leistung von F. K. Schweikart und von Fr. A. Taurinus. Zeitgenossen von Gauß sind zwei andere Forscher über die Grundlagen der Geometrie; mit diesen haben uns die ausdauernden Untersuchungen der Herren Engel und Stäckel bekannt gemacht.[1])

Der erste dieser Forscher ist Ferdinand Karl Schweikart (1780—1857). Die einzige seiner Schriften mathematischen Charakters ist: *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie,* die in Jena und Leipzig im Jahre 1808 veröffentlicht wurde. Sie enthält im Gegensatz zu dem, was der Titel vermuten läßt, nicht eine vom fünften Postulat unabhängige Geometrie; indem sie auf dem Gebiete der Elemente Euklids bleibt, schlägt sie nur einen einfachen Ersatz des Begriffs paralleler Geraden durch den des Parallelogramms vor.

In der Folge aber entwickelte Schweikart, nachdem er in eine andere Ideenreihe eingetreten war, eine von der Euklidischen Hypothese unabhängige geometrische Theorie (ohne sie zum Druck zu geben), die er durch seinen Freund Gerling im Jahre 1819 an Gauß gelangen ließ, und die ihm die Anerkennung dieses letzten eintrug.

Der zweite der genannten Forscher ist Franz Adolf Taurinus (1794—1874), ein Neffe von Schweikart, der im Jahre 1825 die

1) Engel und Stäckel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß.* Leipzig, 1895. Engel und Stäckel, *Gauß, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie,* Math. Ann. 59. Stäckel, *Friedrich Ludwig Wachter,* Math. Ann. 54.

Theorie der Parallellinien und im folgenden Jahre die *Geometriae prima elementa* veröffentlichte.

Taurinus erkannte, obwohl er von der absoluten Wahrheit des fünften Postulats überzeugt war, gleichwohl die logische Möglichkeit der beiden anderen Hypothesen, die schon in den Untersuchungen von Saccheri und Lambert auftreten; ebenso die Tatsache, daß eine von ihnen auf der Kugel eine konkrete Interpretation findet.

Der einzige Grund, auf den er sich bei seiner Entscheidung zugunsten der Geometrie von Euklid stützt, entspricht der Existenz einer Konstanten, auf die schon Gauß in seiner *nichteuklidischen Geometrie* gestoßen war, durch deren Variation man einen mannigfacher Bestimmungen fähigen Begriff erhalten würde, der als besonderen Fall den Raum einschlösse, was zu der philosophischen Anschauung jener Zeit im Gegensatz zu stehen schien.

Der beachtenswerteste Beitrag, der durch die Untersuchungen von Taurinus geliefert wurde, sind die grundlegenden Formeln der *nichteuklidischen Trigonometrie*, die aus der der sphärischen Geometrie durch Vertauschung des reellen Radius k mit dem imaginären ik $[i = \sqrt{-1}]$ hergeleitet wurden.

Wegen der Bedeutung von Schweikart und Taurinus in der *Geschichte der nichteuklidischen Geometrie* sehe man in Kürze, wie sich die Herren Stäckel und Engel in ihrem wertvollen, anderweitig angeführten Werk ausdrücken.

„Schweikart ist wegen der völlig klaren Anschauung, die er von der Möglichkeit einer vom fünften Postulat absehenden Geometrie besaß, Gauß an die Seite zu stellen, dem er andererseits in der Entwicklung der neuen Lehre nachstand; Taurinus ist wegen seiner Zuversicht in die absolute Wahrheit der Geometrie Euklids mehr mit Saccheri und Lambert zu vergleichen, denen er aber durch die ausgedehntere Entwicklung der neuen Systeme, deren logische Richtigkeit er erkannte, überlegen ist."

§ 10. Die Leistung von N. J. Lobatschefskij.[1]) Der erste, der eine geometrische Theorie veröffentlichte, die sich auf die Negierung des fünften Postulats gründete, war der russische Geometer Lobatschefskij (1793—1856), der an der Universität Kasan Professor war.

---

1) Vergl. Fr. Engel, *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.* I. Bd. N. J. Lobatschefskij, *Zwei geometrische Abhandlungen,* Leipzig 1898, und N. J. Lobatschefskij, *Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale,* übersetzt von H. Liebmann, Leipzig 1904.

Seine ersten Arbeiten über den Gegenstand gehen auf das Jahr 1829 zurück; indessen um in schnellerer Weise die von ihm beim Aufbau der *Geometria imaginaria* oder *Pangeometria* befolgte Methode anzugeben, werden wir uns auf seine *Geometrischen Untersuchungen* aus dem Jahre 1840 beziehen.

In diesen betrachtet Lobatschefskij, nachdem er eine Gruppe von Sätzen, die von der Parallelentheorie unabhängig sind, vorausgeschickt, in der Ebene ein Büschel mit dem Mittelpunkt A und eine Gerade BC, der A nicht angehört. Es sei AD die auf BC senkrechte Gerade des Büschels und AE die zu AD senkrechte Gerade. Diese Gerade ist in dem Euklidischen System die einzige, die BC nicht schneidet. In der Geometrie von Lobatschefskij gibt es im Büschel A noch andere BC nicht schneidende Geraden; die nicht schneidenden werden von dem schneidenden durch zwei Geraden h, k getrennt, die ihrerseits BC auch nicht treffen. Diese Geraden, die der Verfasser Parallelen nennt, haben je einen bestimmten Sinn des Parallelismus: Die Gerade h unserer Figur entspricht dem Rechtssinn, die Gerade k dem Linkssinn. Der Winkel, der von der Geraden AD mit einer der Parallelen gebildet wird, ist der Winkel des Parallelismus, der der Entfernung AD entspricht. Lobatschefskij gebraucht das Symbol $\pi(a)$, um den der Entfernung a entsprechenden Winkel des Parallelismus zu bezeichnen. In der gewöhnlichen Geometrie hat man konstant $\pi(a) = 90^0$; in der von Lobatschefskij ist $\pi(a)$ eine wohl bestimmte Funktion von a, die sich dem Werte 90^0 nähert, wenn a sich der Null nähert, die sich der Null nähert, wenn a sich dem Unendlichen nähert

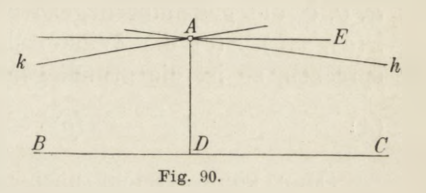


Fig. 90.

Aus der Definition der Parallelen leitet der Verfasser dann ihre hauptsächlichsten Eigenschaften ab, nämlich die Beibehaltung der Eigenschaft (für alle Punkte der Geraden), die Gegenseitigkeit, die Transitivität der Beziehung des Parallelismus (Vgl. Gauß, S. 265) und das asymptotische Verhalten der Parallelen (Vgl. Saccheri, S. 255).

Dem Beweise dieser Eigenschaften gehen die Sätze über die Summe der Winkel eines Dreiecks voraus, dieselben, die schon von Legendre und noch früher von Saccheri gegeben worden sind. Es kann also angenommen werden, daß Lobatschefskij die Untersuchungen dieser Geometer kannte, namentlich die des ersten.

Aber der wichtigste Teil der *Geometria imaginaria* ist die Aufstellung der trigonometrischen Formeln.

Um diese Formeln abzuleiten, führt der Verfasser zwei neue Figuren ein: die Grenzlinie (Kreis mit unendlich großem Radius) und die Grenzfläche (Kugel mit unendlich großem Radius), die in der gewöhnlichen Geometrie beziehungsweise die Gerade und die Ebene sind. Und da man auf der Grenzfläche, der ∞^2 Grenzlinien angehören, eine mit der gewöhnlichen identische Geometrie aufstellen kann, in der die Grenzlinie an die Stelle der Geraden tritt, so erhält Lobatschefskij auf diese Weise das folgende erste beachtenswerte Ergebnis: Auf der Grenzfläche gilt die Euklidische Geometrie und insbesondere die gewöhnliche ebene Trigonometrie.

Diese beachtenswerte Eigenschaft und eine andere, die sich auf koaxiale Grenzlinien (konzentrische Kreise mit unendlich großem Radius) bezieht, benutzt Lobatschefskij, um die Formeln der neuen ebenen Trigonometrie und der sphärischen Trigonometrie abzuleiten. Diese letzten fallen mit den gewöhnlichen der Kugel zusammen, wenn dabei die Elemente des Dreiecks nach rechten Winkeln gemessen werden.

Es ist nützlich, auf die Form hinzuweisen, die Lobatschefskij seinen Formeln gegeben hat. Wenn wir im ebenen Dreieck mit **a, b, c** die gegenüberliegenden Seiten von A, B, C bezeichnen, mit $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$ die Winkel des Parallelismus, die den Seiten entsprechen, so ist die grundlegende Formel von Lobatschefskij:

$$\cos A = \cos\pi(b)\cdot\cos\pi(c) + \frac{\sin\pi(b)\cdot\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)} - 1. \tag{4}$$

Man könnte leicht nachweisen, daß diese Formel und die von Taurinus ((1), S. 266) ineinander umgeformt werden können.

Folgendes sind die bemerkenswertesten Ergebnisse, die Lobatschefskij aus seiner Formel ableitet:

a) Für Dreiecke mit sehr kleinen (unendlich kleinen) Seiten können für die Formeln der imaginären Trigonometrie unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen höherer als der zweiten Ordnung die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln gesetzt werden.

b) Die Vertauschung der Seiten **a, b, c** mit den rein imaginären Seiten ia, ib, ic verwandelt die Formeln der imaginären Trigonometrie in die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

c) Stellt man in der Ebene oder im Raume ein Koordinatensystem, ähnlich dem Kartesianischen, her, so ist es möglich, die Längen der Linien, die Inhalte der Flächen und die Volumen der Körper nach den Methoden der analytischen Geometrie zu berechnen.

§ 11. Die Leistung von J. Bolyai. Zusammen mit Lobatschefskij teilt den Ruhm der Entdeckung der nichteuklidischen

Geometrie der ungarische Jüngling Johann Bolyai (1802—1866). Es waren die Lehrstunden des Vaters Wolfgang, die seine Aufmerksamkeit auf das Parallelenpostulat lenkten, an dessen Beweis er sich machen wollte, ungeachtet der väterlichen Ratschläge, die darauf abzielten, ihn von dem Vorhaben abzubringen. Die Vergeblichkeit seiner Versuche endete sehr bald damit, ihn in den wahren Geist der Sache eindringen zu lassen, und führte ihn dazu, ein von dem berühmten Postulat unabhängiges System aufzubauen. Das Werk von J. Bolyai, das im Jahre 1832 zum Druck gegeben wurde, führt den Titel: „*Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.*“[1])

Später, im Januar des Jahres 1832, von Wolfgang an Gauß übermittelt, veranlaßte die Schrift von seiten dieses letzten einen langen Brief, der uns beweist, daß der große Mathematiker den Appendix zu seiner vollen Befriedigung gefunden hat, und der uns ein wenig den Weg erhellt, der von Gauß in seinen eigenen Untersuchungen verfolgt worden ist.

Auch von den Methoden Bolyais werden wir wie von denen Lobatschefskijs nicht ausführlich sprechen, sondern wir werden uns darauf beschränken, einfach die bemerkenswertesten Ergebnisse anzugeben, die der jugendliche Verfasser erhalten hat.

a) Definition der Parallelen und ihre vom Euklidischen Postulat unabhängigen Eigenschaften (vgl. die Definition von Gauß).

b) Kreis und Kugel mit unendlich großem Radius. Die Geometrie auf der Kugel mit unendlich großem Radius ist mit der gewöhnlichen ebenen Geometrie identisch.

c) Die sphärische Trigonometrie ist vom Postulat Euklids unabhängig. Direkter Beweis der Formeln.

d) Ebene Trigonometrie im nichteuklidischen Falle. Anwendung auf Berechnung der Flächeninhalte und Volumina.

e) Elementar lösbare Aufgaben. Konstruktion eines Quadrats, das einem besonderen Kreise äquivalent ist, unter Voraussetzung, daß das fünfte Postulat falsch ist.

Während Lobatschefskij eine weitergehende Entwicklung für die imaginäre Geometrie, insbesondere für ihren analytischen Inhalt, gegeben hatte, hat Bolyai die Frage der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der geometrischen Sätze von dem Euklidischen Postu-

1) *Editio nova,* Leipzig 1903.

lat eingehender behandelt. Wo Lobatschefskij hauptsächlich darauf ausgeht, ein geometrisches System unter Negierung des fraglichen Postulats aufzubauen, stellt Johann Bolyai klar, welche Sätze und Konstruktionen in der gewöhnlichen Geometrie von dem Postulat nicht abhängen. Derartige Sätze, die er absolut wahr nennt, gehören der absoluten Wissenschaft vom Raume an. Die Aufsuchung der Sätze, die dieser Wissenschaft angehören, würde durch den Vergleich der Geometrie von Euklid mit der von Lobatschefskij bewirkt werden können. Alles, was die beiden Geometrien gemeinsam haben, z. B. die Formeln der sphärischen Trigonometrie, gehört der absoluten Geometrie an.

Johann Bolyai gelangt aber direkt zum Ziel.

Ein eleganter absoluter Satz von Bolyai ist folgender:

In einem ebenen Dreieck verhalten sich die Längen der Kreise mit Radien, die den Seiten eines Dreiecks gleich sind, untereinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Also werden wir, wenn wir mit a, b, c die Seiten eines Dreiecks, mit α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel, mit O_x die Länge eines Kreises mit dem Radius x bezeichnen, haben:

$$O_a : O_b : O_c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Wir bemerken, daß bei der Euklidischen Hypothese, wo $O_x = 2\pi x$ ist, der Satz von Bolyai wird:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

also der bekannte Sinussatz der gewöhnlichen Trigonometrie.

§ 12. Die Ausbreitung der nichteuklidischen Geometrie. Die Werke von Lobatschefskij und Bolyai fanden bei ihrem Erscheinen nicht diejenige Aufnahme, die so viele Jahrhunderte allmählicher und stetiger Vorbereitung zu versprechen schienen. Das darf uns aber nicht in Erstaunen setzen, da die Geschichte der Wissenschaft uns lehrt, daß jede radikale Änderung in den einzelnen Zweigen nicht mit einem Schlage die Überzeugungen und die vorgefaßten Begriffe umstürzt, auf denen die Denker und die Forscher eine lange Periode hindurch ihre Lehren aufbauten.

In unserem Falle wurde die Anerkennung der nichteuklidischen Geometrie auch durch besondere Gründe verzögert, als da sind die Schwierigkeit, welche die russischen Werke von Lobatschefskij der Lektüre darboten, das Unbekanntsein der Namen der Neuerer, die Kantische Anschauung vom Raum, die am Anfange des verflossenen Jahrhunderts herrschte.

Zur Lichtung des Dunkels, das in den ersten Jahren die neue Theorie umhüllte, trugen viel die deutschen und französischen Veröffentlichungen einiger Werke von Lobatschefskij bei; aber der wahre Triumph der nichteuklidischen Geometrie rührt von dem Tage her, an dem man erfuhr, daß Gauß von ihrer logischen Gültigkeit und von der Möglichkeit des ihr entsprechenden physischen Raumes überzeugt war. Alsdann wurde die alte Parallelenfrage, indem sie unter einem vollständig neuen Gesichtspunkte die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich zog, Mittelpunkt eines weiten Gebietes von Untersuchungen; von diesen hatten einige den einfachen Zweck, die Werke der Begründer der nichteuklidischen Geometrie dem großen Publikum besser zugänglich zu machen, während andere darauf abzielten, die Ergebnisse, den Inhalt und die Bedeutung der neuen Lehre zu erweitern.

Diese Untersuchungen können ihren Methoden gemäß drei Hauptrichtungen zugeteilt werden.

Die erste ist die elementare Richtung, der die Werke von Lobatschefskij und Bolyai angehören, die zweite ist die differentiale metrische Richtung, die einerseits in einer klassischen Arbeit von Riemann, andererseits in den Arbeiten von Helmholtz und Lie erstanden; die dritte, die aus dem Bestreben entstand, auch die metrischen Eigenschaften in projektiver Form auszusprechen, ist die projektive Richtung. Diesen drei Hauptrichtungen würde man noch eine weitere hinzufügen können, die sich mit der Auffassung von Fourier (vgl. S. 258) berührt und darauf abzielt, die metrischen Eigenschaften eines Raumes vermittels des Abstandes, den man als ursprünglichen Begriff ansieht, zu charakterisieren.

Von den Fortschritten der Geometrie nach diesen neuen Richtungen werden wir im folgenden kurz sprechen.

§ 13. Postulate, die dem Euklidischen Postulat gleichwertig sind. Bevor wir das elementare Gebiet verlassen, scheint es uns zweckmäßig, die Aufmerksamkeit des Lesers auf den Wert zu lenken, den im Organismus der Geometrie solche Sätze haben, die in gewissem Sinne als dem fünften Postulat gleichwertige Hypothesen angesehen werden können.

Um uns klar verständlich zu machen, beginnen wir mit der Entwicklung des Begriffs dieser Gleichwertigkeit.

Zwei Hypothesen sind absolut gleichwertig, wenn sich jede von ihnen aus der anderen ohne die Hilfe einer neuen Hypothese ableiten läßt. In diesem Sinne sind die folgenden beiden Hypothesen absolut gleichwertig:

a) Zwei Geraden, die einer dritten parallel sind, sind untereinander parallel;

b) durch einen Punkt außerhalb einer Geraden geht nur eine Parallele zu jener Geraden.

Diese Art von Gleichwertigkeit besitzt nicht viel Interesse, da die beiden Hypothesen einfach zwei verschiedene Formen desselben Satzes sind. Sehen wir vielmehr, wie dieser Begriff der Gleichwertigkeit verallgemeinert werden kann.

Wir setzen voraus, daß eine deduktive Theorie auf ein gewisses System von Hypothesen gegründet ist, die wir mit $\{A, B, C, \ldots H\}$ bezeichnen wollen. Es seien ferner M und N zwei neue Hypothesen von der Eigenschaft, daß man N aus dem System $\{A, B, C, \ldots H, M\}$ ableiten kann und M aus dem System $\{A, B, C, \ldots H, N\}$. Wir deuten das an, indem wir schreiben:

$$\{A, B, C, \ldots H, M\} \cdot \supset \cdot N,$$
$$\{A, B, C, \ldots H, N\} \cdot \supset M.$$

Alsdann werden wir, den Begriff der Gleichwertigkeit erweiternd, sagen, daß die beiden Hypothesen M, N in bezug auf das zugrundeliegende System $\{A, B, C, \ldots H\}$ gleichwertig sind.

Wir betonen die Wichtigkeit, die das grundlegende System $\{A, B, C, \ldots H\}$ in dieser Definition hat. In der Tat kann es vorkommen, daß bei Einschränkung des grundlegenden Systems, z. B. bei Weglassung der Hypothese A, nicht mehr gleichzeitig die beiden Ableitungen.

$$\{B, C, \ldots H, M\} \cdot \supset N,$$
$$\{B, C, \ldots H, N\} . \supset M$$

möglich sind.

Alsdann sind für das neue grundlegende System $\{B, C, \ldots H\}$ die beiden Hypothesen M, N nicht gleichwertig.

Nach diesen Erklärungen logischer Art wollen wir sehen, was sich aus den vorangehenden Entwicklungen für die Gleichwertigkeit mancher Hypothesen und der Euklidischen Hypothese ergibt.

Nehmen wir an erster Stelle als grundlegendes System von Hypothesen dasjenige, das von den Postulaten der Assoziation (Verknüpfung) (A) und Distribution (Anordnung) (B), die in der gewöhnlichen Geometrie die Begriffe der Geraden und der Ebene charakterisieren[1]), von den Postulaten der Kongruenz (C)[2]) und von dem Postulat des Archimedes (D)[3]) gebildet wird. In bezug auf dies

1) Vgl. Art. 3. 2) Vgl. Art. 4. 3) Vgl. Art. 5.

grundlegende System, das wir mit $\{A, B, C, D\}$ bezeichnen wollen, sind die folgenden Hypothesen unter sich und der von Euklid in seinem fünften Postulat formulierten gleichwertig.

a) Die inneren Winkel auf derselben Seite, die von zwei Parallelen mit einer Schneidenden gebildet werden, sind Supplemente (Ptolemäus).

b) Zwei parallele Geraden sind Linien gleichen Abstandes (Posidonius).

c) Wenn eine Gerade die eine von zwei Parallelen trifft, so trifft sie auch die andere (Proklus); oder auch: zwei Geraden, die einer dritten parallel sind, sind untereinander parallel; oder auch: durch einen Punkt außerhalb einer Geraden geht eine einzige Parallele zu jener Geraden.

d) Zu einem beliebigen Dreieck kann man immer ein ähnliches Dreieck von beliebiger Größe konstruieren (Wallis).

e) Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, geht immer ein Kreis (W. Bolyai).

f) Durch einen Punkt, der zwischen den Schenkeln eines Winkels liegt, geht immer eine Gerade, welche die beiden Schenkel des Winkels schneidet (Lorenz).

α) Wenn von zwei Geraden r, s die eine senkrecht und die andere schief zu der Schneidenden AB ist, so sind die Abschnitte der Senkrechten, die von den Punkten von s auf r gefällt werden, kleiner als AB auf der Seite, auf der AB mit r einen spitzen Winkel bildet (Nasîr-Eddîn).

β) Der Ort der Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben, ist eine Gerade (Clavius).

γ) Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei rechten Winkeln (Saccheri).

Nun setzen wir voraus, daß man das zugrunde liegende Hypothesensystem beschränkt, indem man von der Archimedischen Hypothese absieht. Alsdann sind die Sätze a), b), c), d), e), f) auch für das neue grundlegende System $\{A, B, C\}$ untereinander und dem fünften Postulat von Euklid gleichwertig. Was die Sätze α), β), γ betrifft, so sind sie auch untereinander für das System $\{A, B, C\}$ gleichwertig, keiner aber ist dem Euklidischen Postulat gleichwertig. Dies Ergebnis, das die Aufgabe des Archimedischen Postulats ersichtlich macht, ist in einer neueren Abhandlung von M. Dehn (1900) enthalten.[1] In dieser Abhandlung wird bewiesen, daß

1) Vgl. Math. Ann. Bd. 53, S. 405—439 *„Die Legendreschen Sätze über die Winkelsummen im Dreieck“.*

die Hypothese γ) über die Summe der Winkel eines Dreiecks nicht nur mit der gewöhnlichen elementaren Geometrie verträglich ist, sondern auch mit einer neuen, notwendigerweise nichtarchimedischen Geometrie, in der das fünfte Postulat nicht gilt und in der durch einen Punkt unendlich viele Geraden gehen, die eine angegebene Gerade nicht schneiden. Dieser Geometrie gibt der Verfasser den Namen: Semi-Euklidische Geometrie.

Die weitere Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie.

Um von den weiteren Fortschritten der Geometrie nach der metrisch-differentialen und nach der projektiven Richtung Rechenschaft zu geben, werden wir das elementare Gebiet überschreiten müssen, um von einigen höheren mathematischen Theorien zu sprechen, als da sind die metrisch-differentiale Geometrie in einer Mannigfaltigkeit, die Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen, die reine projektive Geometrie (System Staudt) und die ihr untergeordneten metrischen Geometrien. Da es dem Charakter dieses Buches nicht angemessen ist, auf allzu hohe Fragen einzugehen, werden wir uns allein auf diejenigen Dinge beschränken, die notwendig sind, um dem Leser ein Verständnis des Geistes zu verschaffen, der die neuen Untersuchungen beseelt, und ihn zu einem neuen geometrischen System zu führen, das man Riemann verdankt, das durch die vorhergehenden Untersuchungen von Anfang an dadurch ausgeschlossen wurde, daß sie die Unendlichkeit der Geraden annahmen. Dies System ist auch unter dem Namen seines Begründers bekannt und entspricht der Hypothese des stumpfen Winkels bei Saccheri und Lambert.

A. Metrisch-differentiale Richtung.

§ 14. Die grundlegenden Begriffe in bezug auf Flächen konstanter Krümmung. — Um das gesteckte Ziel leichter zu erreichen, ist es zweckmäßig, von den folgenden Betrachtungen auszugehen.

Ist eine Fläche gegeben, so nehmen wir uns vor, zu sehen, bis zu welchem Punkte man auf ihr eine der ebenen analoge Geometrie begründen kann.

Durch zwei Punkte A, B der Fläche geht im allgemeinen eine ihr angehörende wohl bestimmte Linie, die den kürzesten Abstand zwischen den beiden Punkten auf der Oberfläche angibt. Eine solche Linie ist die geodätische Verbindungslinie der beiden Punkte A, B der Fläche. Wenn es sich z. B. um eine Kugel handelt, so ist die

geodätische Linie, die ein Punktepaar verbindet (vorausgesetzt, daß diese nicht Endpunkte eines Durchmessers sind), ein Bogen des größten Kreises, den sie bestimmen.

Wollen wir nun die Geometrie auf einer Fläche mit der Geometrie auf der Ebene vergleichen, so erscheint es naturgemäß, die geodätischen Linien jener (die den Abstand auf der Fläche messen) mit den Geraden auf dieser in Vergleich zu stellen, und auch als (geodätisch) gleich auf einer Fläche zwei (auf ihr gezogene) Figuren anzusehen, die man einander Punkt für Punkt in der Weise entsprechen lassen kann, daß die geodätischen Abstände zwischen den entsprechenden Punktepaaren gleich sind.

Zu diesem Begriff der Gleichheit kann man in anschaulicher Weise gelangen, wenn man annimmt, daß die Fläche durch ein biegsames und unausdehnbares Blatt verwirklicht ist, und daß die von uns gleich genannten Figuren durch eine Bewegung der Fläche, in der diese nicht starr bleibt, sondern, wie vorher gesagt ist, sich biegt, miteinander zur Deckung gebracht werden können.

Nehmen wir als Beispiel ein Stück Zylinderfläche, das durch einfache Biegung ohne Dehnung, Faltung (Verdoppelung) und Riß auf einem ebenen Gebiet abgewickelt werden kann. Es ist klar, daß in diesem Falle gleich auf der Fläche zwei Figuren genannt werden müssen, die sich über gleiche ebene Figuren erstrecken, wohl verstanden, daß im allgemeinen zwei derartige Figuren nicht im Raume gleich sind. Kehren wir zu einer beliebigen Fläche zurück, so führt das vorher angeführte System von Übereinkommen zu einer Geometrie auf der Fläche, die wir stets für passend begrenzte (sog. normale) Gebiete zu betrachten beabsichtigen. Zwei Flächen, die aufeinander durch eine Biegung ohne Dehnung abwickelbar sind, werden dieselbe Geometrie haben; so wird man z. B. auf einer Zylinderfläche und im allgemeinen auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche eine Geometrie haben, die der einer ebenen Fläche angepaßt werden kann.

Ein Beispiel von Geometrie auf einer Fläche, die von der Ebene wesentlich verschieden ist, gibt uns die Kugelgeometrie, weil es unmöglich ist, ein Stück der Kugel auf der Ebene abzuwickeln.

In diesem Beispiel haben wir jedoch eine bemerkenswerte Analogie zu der ebenen Geometrie: Diese Analogie findet (und es würde für uns ein Stück der Kugel genügen) ihre Grundlage in der Tatsache, daß sich die Kugel wie die Ebene frei auf sich selbst bewegen kann, so daß für gleiche Figuren auf der Kugel Sätze gelten, die zu den Postulaten der Kongruenz auf der Ebene ganz analog sind.

Suchen wir das Beispiel zu verallgemeinern. Damit eine in geeigneter Weise begrenzte Fläche sich unter Biegung ohne Dehnung nach derselben Art wie eine ebene Fläche auf sich selbst bewegen kann, ist erforderlich, daß eine gewisse Zahl (die für die vorgenannten Biegungen unveränderlich ist) in allen Punkten der Fläche einen konstanten Wert hat. Diese Zahl ist schon von Gauß unter dem Namen Krümmung[1]) eingeführt worden.

Man kann in Wirklichkeit Flächen mit konstanter Krümmung konstruieren und dabei die drei möglichen Typen unterscheiden:

$$C = 0, \quad C > 0, \quad C < 0.$$

Für $C = 0$ hat man die abwickelbaren (an die Ebenen anpaßbaren) Flächen; für $C > 0$ hat man die Flächen, die auf einer Kugelfläche (mit des Radius $\sqrt{C}$) abgewickelt werden können, die man als Modell von ihnen ansehen kann.

Für $C < 0$ hat man die Flächen, die auf der Pseudosphäre abwickelbar sind, die man als Modell für die Flächen mit konstanter negativer Krümmung annehmen kann.

Die Pseudosphäre ist eine Rotationsfläche; die Gleichung der Meridiankurve (Tractrix)[2]), auf die Rotationsachse z und eine zu z senkrechte, passend gewählte Gerade bezogen, lautet:

$$(1) \qquad z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2},$$

1) Wenn man daran erinnert, daß man unter Krümmung einer ebenen Linie in einem Punkte den reziproken Wert des Radius des Berührungskreises in jenem Punkte (des Kreises, der mit der Kurve drei unendlich nahe Punkte gemein hat) versteht, so sieht man, wie man die Krümmung einer Fläche in einem Punkte M definieren kann:

Ist durch M die Normale n zur Fläche gezogen, so betrachte man das Büschel von Ebenen durch n und das bezügliche Kurvenbüschel, das es auf der Fläche ausschneidet. Unter den ebenen Kurven des Büschels gibt es deren zwei aufeinander senkrechte, deren (oben definierte) Krümmungen die Eigenschaften des Maximums und Minimums besitzen. Das Produkt dieser Krümmungen gibt die Krümmung der Fläche im Punkte M (Gauß). Der Krümmung von Gauß kommt dann ein in die Augen fallender Charakter zu; sie bleibt unverändert für eine Biegung ohne Dehnung; wenn also zwei Flächen in dem im Text angegebenen Sinne abwickelbar sind, müssen die entsprechenden Punkte dieselbe Krümmung haben (Gauß). Dies, ein Ergebnis, dessen Umkehrung im Falle konstanter Krümmung von Minding gegeben wurde, macht es offenbar, daß die auf sich frei beweglichen Flächen durch die Konstanz der Krümmung charakterisiert sind.

2) Die Tractrix kann geometrisch als diejenige Kurve definiert werden, in der die Strecke der Tangente, die zwischen dem Berührungspunkte und der Asymptote enthalten ist, eine konstante Länge hat.

wo k mit der Krümmung C der Fläche durch folgende Beziehung verknüpft ist:

$$C = -\frac{1}{k^2}.$$

An die Pseudosphäre, die von (1) erzeugt wird, kann ein beliebiges Flächenstück von der konstanten Krümmung $C = -\frac{1}{k^2}$ angelegt werden.

§ 15. Geometrie auf den Flächen mit konstanter Krümmung. — Zwischen der Geometrie auf einer Fläche mit konstanter Krümmung und der eines Stücks der Ebene besteht, wenn beide mit geeigneten Begrenzungen genommen werden, eine Analogie, die wir in Evidenz setzen können, wenn wir die ersten Definitionen und Eigenschaften der einen in die der anderen überführen, wie es summarisch durch die Gegenüberstellung der Ausdrücke angegeben wird, die man in der folgenden Tabelle sieht.

a) Fläche	a) Gebiet der Ebene
b) Punkt	b) Punkt
c) Geodätische Linie	c) Gerade
d) Bogen der geodätischen Linie	d) Geradlinige Strecke
e) Linieneigenschaften der geodätischen Linie	e) Postulate bezüglich der Anordnung der Punkte auf der Geraden
f) Zwei Punkte bestimmen eine geodätische Linie	f) Zwei Punkte bestimmen eine Gerade
g) Grundlegende Eigenschaften der Gleichheit von geodätischen Bogen und von Winkeln	g) Postulate der Strecken- und der Winkelkongruenz
h) Wenn zwei geodätische Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, so sind auch die übrigen Seiten und Winkel gleich.	h) Wenn zwei geradlinige Dreiecke zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, so sind auch die übrigen Seiten und Winkel gleich.

Es folgt, daß man als gemeinsam mit der Geometrie der fraglichen Flächen alle die auf begrenzte ebene Flächenstücke bezüglichen Eigenschaften ansehen kann, die in der Euklidischen Behandlungsweise vom Parallelenpostulat unabhängig sind, und in deren Beweise man von der Gesamtebene (z. B. von der Unendlichkeit der Geraden) nicht Gebrauch macht.

Wir gehen nun dazu über, diejenigen Sätze für das ebene Flächenstück, die mit der Euklidischen Hypothese in Verbindung stehen, mit

den entsprechenden der Fläche zu vergleichen. Z. B. ist in der Ebene die Summe des Winkels eines Dreiecks gleich zwei Rechten. Die entsprechende Eigenschaft gilt nicht allgemein auf der Fläche.

In der Tat ist bekannt, daß auf der Kugel die Summe der Winkel eines Dreiecks größer als zwei rechte Winkel ist. Auf der Pseudospäre hinwiederum ist die genannte Summe kleiner als zwei rechte Winkel. Es folgt hieraus, daß die Eigenschaften der Flächen gleicher Krümmung, die mit dem Wert der Winkelsumme eines Vielecks verknüpft sind, nicht für alle Flächen dieselben sein werden, sondern von ihrer Krümmung abhängen werden.

Die Geometrie der Flächen mit der Krümmung Null und mit konstanter positiver Krümmung ist uns bekannt, weil sie der Euklidischen ebenen Geometrie und der Kugelgeometrie entspricht. Diejenige der Flächen mit konstanter negativer Krümmung wurde von Minding (1839—1840) studiert, der die grundlegenden Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln eines geodätischen Dreiecks feststellte. Diese Beziehungen (pseudosphärische Trigonometrie) entsprechen denen der Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai.

§ 16. Vergleich mit der nichteuklidischen Geometrie der Ebene. Aus den vorhergehenden Ergebnissen erhellt, daß die auf die Summe der Winkel eines Dreiecks bezüglichen Eigenschaften auf einer Fläche mit konstanter Krümmung beziehungsweise entsprechen:

für $C = 0$ denjenigen, die man in der Ebene infolge der Hypothese des rechten Winkels hat;

für $C > 0$ denjenigen, die man in der Ebene infolge der Hypothese des stumpfen Winkels haben würde;

für $C < 0$ denjenigen, die man in der Ebene infolge der Hypothese des spitzen Winkels haben würde.

Das Ergebnis für $C = 0$ ist a priori ersichtlich, da es sich um abwickelbare Flächen handelt.

Die Analogie zwischen der Geometrie auf Flächen mit konstanter positiver oder negativer Krümmung und der Geometrie, die man in der Ebene bei der Hypothese des stumpfen Winkels und bei der Hypothese des spitzen Winkels erhalten würde, läßt sich weiter verfolgen, wenn man die trigonometrischen Beziehungen zwischen den Elementen der fraglichen der Fläche angehörigen geodätischen Dreiecke bestimmt.

Es ergibt sich auf diese Weise, daß man die Geometrie auf einer Fläche mit konstanter oder negativer Krümmung ansehen kann

als eine konkrete Interpretation der nichteuklidischen Geometrie, die man in einem begrenzten Gebiete der Ebene erhält, wenn man die Hypothese des stumpfen Winkels oder des spitzen Winkes annimmt. Die Folge der Deduktionen, die aus solchen Hypothesen sich ergibt, wird also zu einem logisch zusammenhängenden geometrischen System führen müssen. Diese Schlußfolgerung scheint, soweit sie die Hypothese des stumpfen Winkels betrifft, mit dem von Saccheri, Lambert, Legendre gegebenen Beweise der Unmöglichkeit in Widerspruch zu stehen. Aber der Widerspruch verschwindet, wenn man bedenkt, daß jene Beweise nicht nur durch Benutzung der grundlegenden Eigenschaften, die sich auf ein Gebiet der Ebene erstrecken, erhalten worden waren, sondern dadurch, daß man über dies Gebiet hinausgehend die Unendlichkeit der Geraden annahm.

§ 17. Grundlagen einer ebenen Geometrie nach den Ideen von Riemann. Die vorhergehenden Bemerkungen führen uns dazu, die Grundlagen zu einer metrischen Geometrie zu legen, bei der man vom Postulat Euklids absieht, und einen Gesichtspunkt anzunehmen, der allgemeiner als der vorher innegehaltene ist.

a) Wir setzen voraus, daß man von einem begrenzten Gebiet der Ebene ausgeht, nicht von der ganzen Ebene;

b) wir gestehen als Postulate diejenigen elementaren Sätze zu, die uns in dem zu Anfang begrenzten Gebiete von unseren Sinnen enthüllt werden, Sätze bezüglich der Bestimmbarkeit der Geraden, der Kongruenz usw.;

c) wir nehmen an, daß man die Eigenschaften des anfänglichen Gebietes von einem beliebigen Punkte der Ebene aus nach allen Seiten ausdehnen kann (wir sagen nicht auf die gesamte mit einem einzigen Blick umfaßte Ebene).

Die auf Grund dieser Prinzipien entwickelte Geometrie wird die allgemeinste ebene Geometrie sein, welche mit den Daten vereinbar ist, die das Ergebnis unserer im strengen Sinne genommenen und auf ein zugängliches Gebiet beschränkten Erfahrungen ausdrücken.

Auf Grund von dem, was in § 16 gesagt wurde, ist klar, daß die genannte Geometrie in der Fläche mit konstanter Krümmung eine konkrete Interpretation finden wird.

Aber diese Beziehung besteht nur von dem (differentialen) Gesichtspunkte aus, nach dem man nur begrenzte Gebiete vergleicht. Wenn man sich dagegen auf den (integralen) Gesichtspunkt stellt, nach dem man die Geometrie der ganzen Ebene und die Geometrie

auf der Fläche vergleicht, so besteht die Übereinstimmung nicht mehr. In der Tat kann man unter diesem Gesichtspunkt schon nicht einmal sagen, daß auf zwei Flächen mit einer und derselben konstanten Krümmung dieselbe Geometrie gilt. Z. B. hat der Kreiszylinder eine Krümmung Null und ein Gebiet von ihm kann auf einem Gebiet der Ebene abgewickelt werden; aber es ist nicht der ganze Zylinder in dieser Weise auf der ganzen Ebene abwickelbar. Die Integralgeometrie auf dem Zylinder unterscheidet sich deshalb von der der gesamten Euklidischen Ebene. In der Tat gibt es auf dem Zylinder geschlossene geodätische Linien (Kreisschnitte), und im allgemeinen schneiden sich zwei seiner geodätischen Linien (Schraubenlinien) in einer unendlichen Zahl von Punkten statt in zwei.

Analoge Unterschiede treten im allgemeinen auf zwischen einer der nichteuklidischen metrischen Geometrien, die auf Grund der oben ausgesprochenen Postulate begründet werden können, und der Geometrie einer entsprechenden Fläche konstanter Krümmung.

Wenn wir in einem integralen Sinne die Geometrie auf einer Fläche konstanter Krümmung (z. B. auf der Kugel oder auf der Pseudosphäre) zu umfassen suchen, so sehen wir im allgemeinen, daß die grundlegenden Eigenschaften eines in geeigneter Weise begrenzten Gebietes (normales Gebiet), z. B. die auf die Bestimmung der durch zwei Punkte gehenden geodätischen Linie bezüglichen, zu gelten aufhören. Diese Tatsache ist jedoch nicht eine notwendige Folge der Hypothese, auf die sich im vorgenannten Sinne eine allgemeine nichteuklidische Metrik der Ebene gründet. In der Tat, wenn man sich fragt, ob ein geometrisches System möglich ist, das den Bedingungen a), b), c) genügt und die Eigenschaft besitzt, daß die Postulate der Kongruenz und das der Bestimmung der Geraden in der ganzen Ebene gelten, so wird man außer dem gewöhnlichen Euklidischen System die beiden folgenden geometrischen Systeme erhalten:

1. Das System Lobatschefskij-Bolyai, dem wir schon vorher begegneten, in dem es durch einen Punkt zu einer Geraden zwei Parallelen gibt;

2. ein neues System (genannt nach Riemann), das der Hypothese Saccheris vom stumpfen Winkel entspricht, in dem es parallele Geraden nicht gibt.

In diesem letzten System ist die Gerade eine geschlossene Linie von endlicher Länge; man vermeidet dadurch den Widerspruch, auf den man stoßen würde, wenn man die Gerade als offen (unendlich) voraussetzt, eine Voraussetzung, die in die Feststellung des Satzes vom

Außenwinkel nach Euklid und in die Betrachtungen von Saccheri eingeht.

Die logische Möglichkeit des Riemannschen Systems kann man erkennen, wenn man von ihm die konkrete Interpretation gibt, die man erhält, wenn man darauf die gewöhnlichen Bezeichnungen der Geometrie des Bündels[1]) nach folgendem Wörterverzeichnis überträgt,

Bündel	Ebene
Gerade	Punkt
Ebene (Büschel)	Gerade
Winkel (zweier Geraden im Büschel)[2])	Strecke
Dieder (Winkel zweier Ebenen im Büschel)	Winkel
Trieder (dreiseitige Ecke)	Dreieck.

Den Satz, daß die Summe der drei Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke größer als zwei Rechte ist, drückt man alsdann aus, indem man sagt, daß „die Summe der Winkel eines Dreiecks größer als zwei rechte Winkel ist."

Dies Ergebnis stimmt vollständig mit der Hypothese des stumpfen Winkels überein.

Ferner ist zu beachten, daß auf der Ebene von Riemann alle Senkrechten zu einer Geraden in einem Punkte zusammenlaufen. Diese Eigenschaft ist die Übertragung eines bekannten Satzes des Bündels, nach dem alle Ebenen des Büschels, die auf einer Ebene senkrecht stehen, durch eine Gerade gehen, durch die Senkrechte zu dieser Ebene.

Wenn wir jeder Geraden der Ebene von Riemann den Punkt entsprechen lassen, in dem die Senkrechten zu der gegebenen Geraden zusammenlaufen, so erhalten wir eine Beziehung, welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. Die Punkte, die den Geraden eines Büschels entsprechen, gehören einer Geraden an.

2. Dieser Geraden entspricht der Mittelpunkt des Büschels.

Diese beiden Eigenschaften einer ebenen Korrespondenz sind für die in der projektiven Geometrie untersuchte Polarität charak-

1) Man versteht unter Bündel die Gesamtheit der Geraden und Ebenen, die durch einen Punkt gehen. Die Geometrie des Bündels wird von der Gesamtheit der Beziehungen zwischen den Winkeln, Flächenwinkeln (Diedern) usw. gebildet, zu denen die Figuren des Bündels führen.

2) Man beachte, daß in der Geometrie des Bündels der Winkel zweier Geraden von der Vereinigung zweier Scheitelwinkel gebildet wird. Eine analoge Bemerkung gilt für Dieder und Trieder.

teristisch; also können wir die oben definierte Beziehung die absolute Polarität der Ebene von Riemann nennen.

Die absolute Polarität der Ebene von Riemann ist die Übertragung der Korrespondenz, die im Bündel entsteht, wenn man jeder Ebene die senkrechte Gerade zuordnet, also der senkrechten Polarität des Bündels.

§ 18. Über die Möglichkeit, im Euklidischen Raume Flächen konstanter Krümmung herzustellen, auf denen, als Ganzes betrachtet (in integraler Weise), die Eigenschaften der nichteuklidischen Geometrie gelten. Wenn auch, wie wir gesagt haben, in der Geometrie einer Fläche konstanter (positiver oder negativer) Krümmung des Euklidischen Raumes im allgemeinen nicht die vollständige nichteuklidische Geometrie der Ebene von Lobatschefskij und von Riemann zutage tritt, so kann man doch fragen, ob ein derartiges Zusammentreffen nicht für irgendeine besondere Fläche statthaben kann.

1. **Der Satz von Hilbert.** Es gibt keine reguläre (analytische) Fläche, auf der in ihrer ganzen Erstreckung die Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai gilt.

2. Eine Fläche, auf der in ihrer ganzen Erstreckung die Geometrie der Riemannschen Ebene gelten würde, müßte notwendigerweise geschlossen sein.

Die einzige reguläre geschlossene Fläche mit konstanter positiver Krümmung ist die Kugel (**Satz von Liebmann**).

Aber auf der Kugel, in deren begrenzten (normalen) Gebieten die Riemannsche Geometrie gültig ist, schneiden sich zwei Geraden in zwei (Gegen-)Punkten. Wir werden deshalb schließen:

Im gewöhnlichen (Euklidischen) Raume gibt es keine Fläche, die in ihrer gesamten Erstreckung in integraler Weise den Eigenschaften der nichteuklidischen Ebenen genügt.

Es ist wohl zu beachten, daß die Kugel unter allen Flächen mit konstanter Krümmung den Postulaten der Kongruenz nicht nur in begrenzten Gebieten, sondern auf der ganzen, mit einem Blick umfaßten, Fläche genügt. Diese Tatsache veranlaßt uns, die Postulate der ebenen Geometrie in einer Art auszusprechen, die nicht a priori die mögliche Existenz einer Ebene ausschließt, die alle Charaktere der Kugel besitzt, die bezüglich der Gegenpunkte mit einbegriffen.

Man könnte in der Tat fordern, daß in der Ebene genügt werde

I. Den Postulaten a), b), c) (vgl. S. 279) für begrenzte Gebiete,

II. Den Postulaten der Kongruenz auf der ganzen Ebene.

Man würde alsdann finden:

Die drei geometrischen Systeme { von Euklid
von Lobatschefskij-Bolyai
von Riemann (elliptischer Typus),

denen wir im Vorhergehenden begegnet sind, in denen zwei Punkte ausnahmslos eine Gerade bestimmen;

ein weiteres geometrisches System von Riemann (sphärischer Typus), in der zwei Geraden immer zwei Punkte gemeinsam haben.

Die Ebene, die diesem letzten System entspricht, kann, zum Unterschiede von den beiden andern nichteuklidischen Ebenen, vollständig auf einer Fläche konstanter Krümmung im gewöhnlichen Raume dargestellt werden, auf der Fläche der Kugel.

§ 19. Grundlagen einer räumlichen Geometrie nach Riemann. Wenden wir uns nun dem Raume zu, so wollen wir von der philosophischen Grundlage ausgehen, daß die Postulate, wenn man ihnen auch durch Hypothese eine strenge Gültigkeit zuschreibt, Wahrheiten experimentellen Charakters ausdrücken, die in einem begrenzten Gebiet als wahr nachgewiesen werden können, und wir wollen annehmen, daß auf Grund der genannten Postulate die Punkte des Raumes durch drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 dargestellt seien.

In dieser (analytischen) Darstellung wird jede Linie drei Parametergleichungen entsprechen:

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t);$$

und alsdann werden wir uns die Aufgabe stellen können, eine Funktion s des Parameters t zu bestimmen, welche die Länge eines Kurvenbogens ausdrückt.

Besteht die distributive Eigenschaft, nach der die Länge eines Bogens gleich der Summe der Längen der Teile ist, in die man ihn sich zerlegt denken kann, so wird eine solche Funktion ganz bestimmt sein, wenn man den Elementarabstand zweier Punkte mit den Koordinaten:

$$x_1, x_2, x_3; \quad x_1 + dx_1; \quad x_2 + dx_2; \quad x_3 + dx_3$$

kennt.

Riemann geht von hinreichend allgemeinen Hypothesen aus, denen in der einfachsten Weise genügt wird, wenn man als Ausdruck für das Quadrat des Elementarabstandes eine immer positive

quadratische Form in den Differentialen der Variabeln annimmt; er setzt also:

$$ds^2 = \sum a_{ij} dx_i dx_j,$$

worin a_{ij} Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind.

Wenn man nun das Prinzip der Deckungsmöglichkeit der Figuren annimmt, so würde man beweisen können, daß die Funktionen a_{ij} von solcher Natur sein müssen, in Verfolg einer geeigneten Änderung des Koordinatensystems zu gestatten, daß ds die Form:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{C}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

annimmt, in der C das ist, was Riemann, in Erweiterung des Gaußischen Begriffs, nach Übereinkunft Krümmung des Raumes nennt.[1])

Je nachdem C größer, gleich oder kleiner als Null ist, haben wir den Raum mit konstanter positiver Krümmung, den Raum mit der Krümmung Null oder den Raum mit konstanter negativer Krümmung.

Gehen wir einen Schritt weiter, nehmen wir an, daß das Prinzip der Deckungsmöglichkeit auf den ganzen Raum ausgedehnt wird, außerdem das Postulat, daß die Gerade ausnahmslos durch zwei Punkte bestimmt wird, so findet man alsdann drei Raumformen, nämlich drei Geometrien, die logisch möglich und mit den unseren Ausgangspunkt bildenden Daten vereinbar sind.

Die erste dieser Geometrien (elliptische Geometrie), die der positiven Krümmung entspricht, ist durch die Tatsache charakterisiert, daß in jeder Ebene das System von Riemann gilt, wobei der Raum mit positiver Krümmung nach allen Richtungen unbegrenzt und endlich ist; die zweite, die der Krümmung Null entspricht, ist die gewöhnliche Geometrie von Euklid (parabolische Geometrie); die dritte endlich, die dem negativen Werte der Krümmung entspricht (hyperbolische Geometrie) führt in jeder Ebene zu dem System von Lobatschefskij und Bolyai.

§ 20. Die Leistung von H. Helmholtz und die Untersuchungen von S. Lie. Hermann Helmholtz (1821—1894) hat in einigen seiner Schriften mathematischen und philosophischen Charakters die Frage der Grundlagen der Geometrie behandelt. — Anstatt a priori die Form

$$ds^2 = \sum a_{ij} dx_i dx_j$$

1) Vgl. F. Schur, *Über Räume konstanten Krümmungsmaßes*, Math. Ann. Bd. 27 u. 28.

als Ausdruck für den Elementarabstand anzunehmen, hat er gezeigt, daß dieser Ausdruck in der von Riemann für die Räume konstanter Krümmung gegebenen Form der einzig mögliche ist, wenn man zu der Hypothese von Riemann von Anfang an diejenige hinzufügt, die sich in einer der Bewegung starrer Körper angepaßten Form auf die Deckungsmöglichkeit der Figuren bezieht.

Das Riemann-Helmholtzsche Problem ist einer tiefeindringenden Kritik von S. Lie (1842—1899) unterworfen worden. Dieser ist von der grundlegenden Idee in den Untersuchungen von Helmholtz ausgegangen, auf die von Klein aufmerksam gemacht wurde, daß Kongruentsein für zwei Figuren die Möglichkeit bedeutet, sie durch eine Punkttransformation des Raumes ineinander umzuwandeln, und daß die Eigenschaften, nach denen die Kongruenz den logischen Charakter der Gleichheit annimmt, der Tatsache innewohnen, daß die Bewegungen eine Gruppe von Transformationen bilden.

Demgemäß wird das Riemann-Helmholtzsche Problem von Lie unter folgende Form gebracht:

Alle kontinuierlichen Gruppen des Raumes zu bestimmen, die innerhalb eines begrenzten Gebiets die Eigenschaften der Bewegungen besitzen.

Werden diese Eigenschaften in bezug auf den Begriff der freien Beweglichkeit der von einem Punkte ausgehenden Linien- und Flächenelemente in geeigneter Weise postuliert, so finden sich drei Typen von Gruppen, welche die drei Geometrien von Euklid, von Lobatschefskij-Bolyai und von Riemann charakterisieren.

B. Projektive Richtung.

§ 21. Unterordnung der Euklidischen Geometrie unter die projektive. Schließlich steht auch die projektive Geometrie in einer eleganten Beziehung zu den drei geometrischen Systemen von Lobatschefskij-Bolyai, von Riemann und von Euklid.

Um auch von dieser letzten Art, das Problem zu behandeln, eine Idee zu geben, bringen wir in Erinnerung, daß die projektive Geometrie nach dem System von G. C. Staudt (1798—1867) ausschließlich auf graphischen Begriffen beruht, die sich auf Punkte, auf Geraden und Ebenen beziehen, und daß sie systematisch jeden Begriff der Kongruenz und der Bewegung (und also des Maßes usw.) ausschließt. Aus diesem Grunde wird die projektive Geometrie, da sie von einer gewissen Gruppe von Postulaten absieht, eine beschränktere Zahl von allgemeinen Eigenschaften umfassen. Diese sind (soweit

sie ebene Figuren betreffen) die (projektiven) Eigenschaften, die durch Projizieren und Schneiden unverändert bleiben.

Nichtsdestoweniger können, nachdem im Raume die projektive Geometrie begründet ist, in ihren Organismus die metrischen Begriffe als Beziehungen zu gewissen besonderen (metrischen) Gebilden eingeführt werden. Indem wir uns auf den Fall der euklidischen Ebene beschränken, wollen wir sehen, welcher graphischen Interpretion die grundlegenden metrischen Begriffe des Parallelseins und des Senkrechtseins fähig sind.

Es ist zu dem Zwecke nützlich, besonders die Gerade im Unendlichen und die absolute Involution, die auf ihr die Paare senkrechter Strahlen eines Büschels bestimmen, in Betracht zu ziehen. Die konjugiert-imaginären Doppelpunkte dieser Involution werden Kreispunkte genannt, nach ihrer Eigenschaft, allen Kreisen der Ebene anzugehören (Poncelet).

Nachdem dies festgesetzt ist, kommt das Parallelsein zweier Geraden graphisch in der Eigenschaft zum Ausdruck, daß sie in einem Punkte der Geraden im Unendlichen zusammentreffen; das Senkrechtsein zweier Geraden kommt graphisch in der Eigenschaft ihrer Punkte im Unendlichen zum Ausdruck, in der absoluten Involution konjugiert zu sein, nämlich die Kreispunkte harmonisch zu trennen (Chasles).

Andere metrische Eigenschaften, die graphisch ausgedrückt werden können, sind diejenigen, die den Winkelgrößen innewohnen, weil jede Beziehung:

$$F(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \ldots) = 0$$

zwischen den Winkeln $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \ldots$ durch die andere:

$$F\left(\frac{\log a}{2i}, \frac{\log b}{2i}, \frac{\log c}{2i} \cdots\right) = 0$$

ersetzt werden kann, in der a, b, c die Doppelverhältnisse sind, die von den Schenkeln der Winkel mit den (imaginären) Geraden gebildet werden, welche die Scheitel der Winkel mit den Kreispunkten der Ebene verbinden (Laguerre).

Allgemeiner beweist man, daß die Kongruenz zwischen zwei beliebigen ebenen Figuren durch eine graphische Beziehung von ihnen zu der Geraden im Unendlichen und die absolute Involution ausgedrückt werden kann. Und da die Kongruenz die Grundlage für alle metrischen Eigenschaften ist, so folgt, daß die Gerade im Unendlichen und die absolute Involution alle Eigenschaften der metrischen Geometrie der projektiven Geometrie unterzuordnen gestatten.

Die metrischen Eigenschaften erscheinen demgemäß in der projektiven Geometrie nicht als graphische Eigenschaften der für sich allein betrachteten Figuren, sondern als graphische Eigenschaften in bezug auf grundlegende metrische Gebilde, die von der Geraden im Unendlichen und von der absoluten Involution gebildet werden.

Das System der metrischen Grundgebilde bezeichnet man kurz als das Absolute der Ebene (Cayley).

Was wir von der Ebene gesagt haben, überträgt sich in naturgemäßer Weise auf den Raum. Im Raume sind die metrischen Grundgebilde, welche die metrischen Eigenschaften den graphischen unterzuordnen gestatten, die Ebene im Unendlichen und eine bestimmte Polarität (absolute Polarität) in dieser Ebene, die von der Polarität des Bündels, die jeder Geraden die senkrechte Ebene entsprechen läßt, ausgeschnitten wird. Der der genannten Polarität zugrunde liegende Kegelschnitt ist der allen Kugeln gemeinsame Kreis im Unendlichen.

§ 22. Unterordnung der nichteuklidischen Geometrien unter die projektive Geometrie. Es erheben sich nun von selbst die beiden Fragen:

1) Ist bei den nichteuklidischen Hypothesen die Begründung der projektiven Geometrie möglich?

2) Können, wenn die Möglichkeit dieser Begründung gegeben ist, die metrischen Eigenschaften wie im Euklidischen Falle den projektiven untergeordnet werden?

Die Antwort ist eine Bejahung für beide. Wenn im Raume das System von Riemann gültig ist, so bietet die Begründung der projektiven Geometrie nicht irgendwelche Schwierigkeit, wegen der Tatsache, daß man ohne weiteres nach Einführung der uneigentlichen Elemente die graphischen Eigenschaften, die der gewöhnlichen projektiven Geometrie zugrunde liegen, bestätigt findet. Wenn im Raume das System von Lobatschefskij-Bolyai gültig ist, so kann man auch die projektive Geometrie begründen, wenn man unter passenden Annahmen uneigentliche (oder ideale) Punkte, Geraden und Ebenen einführt[1]), vermittels desselben Kriteriums, das man in dem Euklidischen Falle befolgt, um den Raum durch die Elemente im Unendlichen zu vervollständigen. Es wird also genügen, neben dem eigentlichen Bündel (Gesamtheit der Geraden, die durch einen Punkt

1) Die Einführung der idealen Elemente ist ohne jedes Parallelenaxiom möglich. Vgl. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig 1909.

gehen) die beiden uneigentlichen Bündel zu betrachten, von denen das eine von allen Geraden, die in einem und demselben Sinne einer gegebenen Geraden parallel sind, das andere von allen Senkrechten zu einer und derselben Ebene gebildet wird, und diese als uneigentliche Punkte einzuführen, dadurch daß man sie als Mittelpunkte dieser Bündel ansieht.

Abgesehen davon, daß die einer Ebene angehörigen uneigentlichen Punkte nicht einer Geraden (Geraden im Unendlichen) zugewiesen werden können, bilden sie ein ganzes Gebiet, das von dem Gebiet der wirklichen Punkte (eigentlichen Punkte) durch einen Kegelschnitt (Grenz-Kegelschnitt oder Kegelschnitt im Unendlichen) getrennt ist. Dieser Kegelschnitt ist der Ort der uneigentlichen Punkte, die von den parallelen Geraden bestimmt werden. Im Raume sind die uneigentlichen Punkte von den eigentlichen Punkten durch eine nicht geradlinige Fläche 2. Grades (Grenzfläche 2. Grades oder Fläche 2. Grades im Unendlichen) getrennt, den Ort der unendlich fernen Punkte, in denen sich die parallelen Geraden schneiden.

Ist die Geltung der projektiven Geometrie auch für die nichteuklidischen Hypothesen festgestellt (Klein[1]), so genügt es, um die Unterordnung der metrischen Geometrie unter die projektive zu erhalten, wie im euklidischen Falle die grundlegenden metrischen Gebilde (das Absolute) mit in die Betrachtung zu ziehen und die metrischen Eigenschaften der Figuren als graphische Beziehungen von ihnen zu diesen Gebilden zu interpretieren.

Auf der Ebene von Lobatschefskij-Bolyai ist das grundlegende metrische Gebilde der Grenzkegelschnitt, der das Gebiet der eigentlichen Punkte von dem der uneigentlichen Punkte trennt; auf der Ebene von Riemann ist es ein imaginärer Kegelschnitt, der durch die absolute Polarität der Ebene bestimmt ist (vgl. § 17). Sowohl in dem einen wie in dem andern Falle sind die metrischen Eigenschaften der Figuren sämtlich die graphischen Eigenschaften, die in den projektiven Transformationen[2]), die das Absolute fest lassen, unverändert bleiben.

---

1) Die Frage der Unabhängigkeit der projektiven Geometrie von der Parallelenlehre wird von Klein in seiner ersten Veröffentlichung „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie", Math. Ann. IV, S. 573—625 (1871) flüchtig berührt. Eine ausführlichere Darlegung der Frage findet man in der zweiten Veröffentlichung von Klein über denselben Gegenstand, Math. Ann. VI, S. 112—145 (1873).

2) Es ist bekannt, daß man unter projektiven Transformationen diejenigen Transformationen versteht, in denen einem Punkte ein Punkt, einer Geraden eine Gerade, einem Punkte und einer Geraden, die sich angehören, ein Punkt und eine Gerade, die sich angehören, einander entsprechen.

Diese projektiven Transformationen machen dann die ∞^3 Bewegungen der nichteuklidischen Ebene aus.

In dem Euklidischen Falle sind die genannten Transformationen (die das Absolute nicht ändern) die ∞^4 Ähnlichkeitsverwandtschaften, unter denen sich im besonderen die ∞^3 Bewegungen finden.

Im Raume geschieht die Unterordnung der metrischen Geometrie unter die projektive vermittels der Grenzfläche 2. Grades (das Absolute des Raumes). Wenn diese reell ist, erhält man die Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai; wenn sie imaginär ist, erhält man die Geometrie von Riemann (elliptischer Typus).

Die metrischen Eigenschaften der Figuren sind also die graphischen Eigenschaften des Raumes in Beziehung auf sein Absolutes, nämlich die graphischen Eigenschaften, die in allen projektiven Transformationen, die das Absolute des Raumes fest lassen, ungeändert bleiben.

Wie werden in bezug auf das Absolute die Begriffe des Abstandes und des Winkels ausgedrückt?

Führt man auf der projektiven Ebene ein beliebiges System von homogenen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) ein, das die Gerade durch lineare Gleichungen darzustellen gestattet, so wird die Gleichung des absoluten Kegelschnitts von dem Typus

$$\Omega_{xx} = \sum a_{ij} x_i x_j = 0$$

sein.

Alsdann wird der Abstand zweier Punkte $(x_1 x_2 x_3)$, $(y_1 y_2 y_3)$ bis auf einen konstanten Faktor durch den Logarithmus des Doppelverhältnisses der Gruppe ausgedrückt, die sie mit den Punkten M, N bilden, in denen ihre Verbindungslinie das Absolute trifft.

Setzt man dann

$$\Omega_{xy} = \sum a_{ij} x_i y_j$$

und erinnert man sich aus der analytischen Geometrie, daß das Doppelverhältnis der vier Punkte X, Y, M, N durch

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

gegeben ist, so wird also der Abstand

$$D_{xy} = \frac{k}{2} \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

sein oder aber, wenn wir die Umkehrungen der Kreisfunktionen und die hyperbolischen Funktionen[1]) einführen:

$$D_{xy} = ik \operatorname{arc} \cos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = k \operatorname{arc} \operatorname{Ch} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

$$D_{xy} = ik \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = k \operatorname{arc} \operatorname{Sh} \frac{\sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Die Konstante k, die in diesen Formeln erscheint, ist dann mit der Krümmung C von Riemann durch folgende Beziehung verknüpft:

$$C = -\frac{1}{k^2}.$$

Für die projektive Deutung des Begriffs des Winkels zweier Geraden gelten analoge Betrachtungen. Der Winkel zweier Geraden ist bis auf den konstanten Divisor $2i$ der Logarithmus des Doppelverhältnisses der Gruppe, welche die beiden Geraden mit den beiden von ihrem gemeinsamen Punkte aus an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten bilden.

Um diesen Winkel analytisch auszudrücken, ist es zweckmäßig, von der Gleichung des Kegelschnitts in Linienkoordinaten auszugehen. Wenn man mit b_{ij} die zu den Elementen a_{ij} in der Diskriminante von Ω_{xx} zugehörigen (reziproken) Unterdeterminanten bezeichnet, so wird die Gleichung des Absoluten in Linienkoordinaten:

$$\Psi_{uu} = \sum b_{ij} u_i u_j = 0.$$

Alsdann wird der Winkel der beiden Geraden $(u_1 u_2 u_3)$, $(v_1 v_2 v_3)$ durch die Formel:

$$\omega_{uv} = \frac{1}{2i} \log \frac{\Psi_{uv} + \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\Psi_{uv} - \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}$$

---

1) Die Beziehungen zwischen den Kreisfunktionen und der Logarithmusfunktion sind in folgenden Identitäten enthalten:

$$\cos\left[\frac{\log a}{2i}\right] = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}; \quad \sin\left[\frac{\log a}{2i}\right] = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}.$$

Analog für die hyperbolischen Funktionen:

$$\operatorname{Ch}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}; \quad \operatorname{Sh}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{i2\sqrt{a}}.$$

ausgedrückt werden oder durch

$$\omega_{uv} = \arccos \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} = \operatorname{arc\,Ch} \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}};$$

$$\omega_{uv} = \arcsin \frac{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} = \operatorname{arc\,Sh} \frac{\sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}}.$$

Ein analoger Ausdruck gilt für den Abstand zweier Punkte und den Winkel zweier Ebenen in der Geometrie des Raumes; es genügt vorauszusetzen, daß die vorhergehenden Formeln

$$\Omega_{xx} = 0; \quad \Psi_{uu} = 0,$$

die (Punkt- und Tangential-)Gleichungen für das Absolute des Raumes statt des Absoluten der Ebene darstellen. Je nachdem $\Omega_{xx} = 0$ die Gleichung einer reellen Fläche 2. Grades mit elliptischen Punkten oder aber die einer imaginären Fläche 2. Grades ist, beziehen sich die gegebenen Formeln auf die Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai oder auf die von Riemann.

Weiter weisen wir darauf hin, daß der Euklidische Fall mit den vorhergehenden in Verbindung gebracht werden kann, wenn man ihn als Grenzfall betrachtet, entsprechend einer Ausartung der (als Umhüllungsfläche betrachteten) absoluten Fläche 2. Grades. Alsdann verliert die Formel des Abstandes jede Bedeutung, insofern die Punkte M, N, in denen die Verbindungslinie von x und y das Absolute trifft, zusammenfallen. Man kann indes vermittels eines passenden Grenzüberganges und einer geeigneten Wahl des konstanten Faktors die Formel in der Weise deuten, daß sie auch in diesem parabolischen Falle zur Darstellung des Abstandes brauchbar ist.

Nicht nötig ist es dabei, eine ähnliche Betrachtung für den Winkel zweier Geraden oder zweier Ebenen anzustellen, insofern die allgemeinen Formeln auch beim Grenzübergange ihre Bedeutung behalten; außerdem könnte man leicht sehen, wie sie vermittels einer einfachen Koordinatentransformation auf diejenigen, die Laguerre im Euklidischen Falle aufstellte, zurückgeführt werden können.

Bemerkung. Die Eigenschaften der ebenen Figuren in bezug auf einen Kegelschnitt und diejenigen des Raumes in bezug auf eine Fläche 2. Grades bilden in ihrer Gesamtheit die projektive Metrik. Die projektive Metrik wurde von A. Cayley (1821—1895)[1]) erforscht, unabhängig von den Beziehungen, die sie zur nichteuklidischen

1) Vgl. „Sixth Memoir Quantics“, Phil. Transactions CXLIX, S. 61—90 (1859), oder auch „Math. Papers“ von Cayley, 2. T., S. 561—592.

Geometrie hat, Beziehungen, die einige Jahre später von F. Klein[1]) aufgedeckt und beleuchtet wurden. Klein verdankt man auch eine für die projektive Metrik sehr in Gebrauch gekommene Nomenklatur. Er nennt hyperbolische Geometrie die Geometrie von Cayley in bezug auf ein reelles, nicht ausartendes Absolute, elliptische Geometrie die auf ein imaginäres, nicht ausartendes Absolute bezügliche Geometrie, parabolische Geometrie den Grenzfall der beiden vorhergehenden in bezug auf ein Absolutes, das als Punktort ausgeartet ist. Daher können wir im folgenden diese Nomenklatur benutzen, um beziehungsweise die geometrischen Systeme von Lobatschefskij-Bolyai, von Riemann und von Euklid zu bezeichnen.

§ 23. Darstellung der Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai auf der Euklidischen Ebene. Zur projektiven Deutung der nichteuklidischen Metriken, von denen wir oben gesprochen haben, wählt man eine interessante Darstellung, die man von der hyperbolischen Geometrie geben kann. Um sie zu erhalten, legen wir in der Ebene einen reellen, nicht ausartenden Kegelschnitt, z. B. einen Kreis, fest und stellen in bezug auf diesen Kreis folgende Definitionen auf:

Ebene = Gebiet der inneren Punkte im Kreise.
Punkt = Innerer Punkt im Kreise.
Gerade = Sehne des Kreises.

Man kann alsdann unmittelbar nachweisen, daß die Postulate über die Bestimmung der Geraden, über die Strecken- und Winkeleigenschaften in Sätze übergehen, die immer gelten, auch wenn man die vorstehenden Bedeutungen der Gebilde annimmt.

Aber in der weiteren Entwicklung der Geometrie fügt man zu den genannten Postulaten die Postulate der Kongruenz hinzu, die in dem folgenden Bewegungsprinzip enthalten sind.

Sind in der Ebene zwei Punkte A, A' und beziehungsweise durch sie die Geraden a, a' gegeben, so gibt es vier Arten, die Ebene mit sich selbst zur Deckung zu bringen, in der Weise, daß A und a beziehungsweise mit A' und a' zusammenfallen.

Genauer wird eine Art der Deckung bestimmt, wenn man einen Strahl von a und einen Strahl von a', eine Seite der Ebene in bezug auf a einer Seite der Ebene in bezug auf a' als entsprechend festlegt.

1) Vgl. „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“, Math. Ann. IV, S. 573—625 (1871).

Von diesen vier Bewegungen sind zwei direkte Kongruenzen, zwei indirekte Kongruenzen.

Wenn man die vorhergehenden Deutungen der Gebilde Punkt, Gerade, Ebene annimmt, so überträgt sich das hier ausgedrückte Prinzip, wohlgemerkt in der projektiven Geometrie, in folgenden Satz:

Ist in der Ebene ein Kegelschnitt (z. B. ein Kreis) gegeben und sind zwei innere Punkte A, A' und durch sie beziehungsweise die beiden Sehnen a, a' festgelegt, so gibt es vier projektive Transformationen der Ebene, die das Gebiet der inneren Punkte im Kegelschnitt ändern und die den Elementen A und a die Elemente A' und a' entsprechen lassen. Um eine von ihnen zu bestimmen, genügt es, zu verlangen, daß ein gegebener Endpunkt von a einem gegebenen Endpunkte von a' und einer bestimmten Seite der Ebene in bezug auf a eine bestimmte Seite der Ebene in bezug auf a' entspricht. Von diesen vier Projektivitäten bestimmen zwei auf dem Kegelschnitt Projektivitäten gleichen Sinnes, die anderen beiden Projektivitäten entgegengesetzten Sinnes.

Nachdem dies festgestellt ist, nehmen wir zur Vervollständigung die in bezug auf einen Kreis der Ebene festgelegten Definitionen wieder auf:

Ebene =	Gebiet der inneren Punkte im Kreise.
Punkt =	Innerer Punkt im Kreise.
Gerade =	Sehne des Kreises.
Bewegungen =	Projektive Transformationen der Ebene, welche das Gebiet der inneren Punkte im Kreise in sich selbst ändern.
Umklappungen =	Homologe Transformationen des Kreises.
Kongruente Figuren =	Figuren, die vermittels der genannten Projektivitäten ineinander verwandelt werden können.

Die vorhergehenden Entwicklungen gestatten ohne weiteres zu behaupten, daß alle Sätze der ebenen Geometrie, die an die Begriffe der Geraden, des Winkels und der Kongruenz gebunden sind, in geeigneter Weise in Eigenschaften in bezug auf das System der inneren Punkte des Kreises übergeführt werden können, ein System, das wir $[S]$ benennen wollen.

Sehen wir nun noch, wie man in dieser durch Übereinkunft hergestellten Metrik, die im Innern des Kreises aufgestellt ist, den Abstand zweier Punkte ausdrücken kann.

Man führe dazu ein System rechtwinkliger Koordinaten (x, y) mit dem Mittelpunkte des Kreises als Anfangspunkt ein. Der Abstand zweier Punkte $A(x, y)$, $B(x', y')$ (in der durch Übereinkunft hergestellten Ebene) kann nicht durch die gewöhnliche Formel

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

dargestellt werden, da sie nicht in den projektiven Transformationen, die wir früher Bewegungen nannten, ungeändert bleiben würde; es wird vielmehr eine Funktion ihrer Koordinaten sein müssen, die in allen Bewegungen ungeändert bleibt und die auf der Geraden die distributive Eigenschaft besitzt, welche durch die Formel

$$\text{Abstand } (AB) = \text{Abstand } (AC) + \text{Abstand } (CB)$$

ausgedrückt wird.

Nun ein Ausdruck der Koordinaten (x, y), (x', y') von A und B, der in den Bewegungen (den projektiven Transformationen, welche den Grenzkreis festlassen) unverändert bleibt, ist das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, M, N, wo M, N die Endpunkte der Sehne AB sind; der allgemeinste Ausdruck, der die verlangte Invarianteneigenschaft besitzt, ist eine Funktion dieses Doppelverhältnisses.

Verlangt man weiter, daß die genannte Funktion in dem oben angegebenen Sinne distributiv wird, so ist notwendig, sie bis auf einen Proportionalitätsfaktor als dem Logarithmus von $(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$ gleich anzunehmen. Wir werden also haben:

$$\text{Abstand } (AB) = \frac{k}{2} \log (ABMN).$$

In analoger Weise geht man vor bei der Bestimmung des Wertes für den Winkel zweier Geraden. In diesem Falle ist zu beachten, daß es nötig ist, wenn der rechte Winkel durch $\frac{\pi}{2}$ ausgedrückt werden soll, als konstanten Faktor des Logarithmus $\frac{1}{2i}$ zu nehmen. Wir werden so haben:

$$\text{Winkel } (ab) = \frac{1}{2i} \log (abmn),$$

wo man mit m und n die (konjugiert imaginären) Tangenten an den Kreis vom Scheitel des Winkels aus und mit $(abmn)$ das Doppelverhältnis der Geraden a, b, m, n bezeichnet, das analytisch durch

$$\frac{\sin (am)}{\sin (bm)} : \frac{\sin (an)}{\sin (bn)}$$

ausgedrückt wird.

Beziehen wir uns auf das, was wir vorher über die Unterordnung der nichteuklidischen metrischen Geometrie unter die projektive Geometrie sagten, so ist klar, daß die vorhergehenden auf den Abstand und den Winkel bezüglichen Formeln mit denen zusammenfallen, die man auf einer nichteuklidischen Ebene erhalten würde, wenn der Grenzkegelschnitt der grundlegende Kreis des Systems $[S]$ wäre. Dies genügt, um zu schließen, daß die Geometrie von $[S]$ eine konkrete Interpretation der Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai liefert.

Weiter ist klar, daß man eine analoge Interpretation auch für die nichteuklidische Stereometrie herstellen könnte, wenn man im gewöhnlichen Raume eine Kugel festlegt und für diese ein System von Definitionen aufstellt, das zu dem vorhergehend angegebenen analog ist.

Was die elliptische Geometrie betrifft, so wird man von ihr eine konkrete Interpretation erhalten, wenn man an die Stelle der reellen Kugel eine imaginäre Kugel setzt. Es müssen als Punkte des elliptischen Raumes nicht nur die (eigentlichen) Punkte des gewöhnlichen Raumes, sondern auch die (uneigentlichen) Punkte angesehen werden, wie sie in der projektiven Geometrie auf der Ebene im Unendlichen in Betracht gezogen werden.

§ 24. Begründung der Geometrie von den graphischen Begriffen aus. Die in den vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzten Begriffssysteme führen zu einer neuen Ideenreihe, in der anstatt der Eigenschaften der Kongruenz und der Bewegung, deren sich Riemann und Helmholtz bedienten, die graphischen Eigenschaften zur ersten Grundlage der Geometrie gemacht werden (Klein). Man beachte, daß, wenn man nicht von Anfang an eine Hypothese über das Schneiden von Geraden einer Ebene einführen will, es zweckmäßig ist, von einem System von Postulaten auszugehen, die in einem begrenzten Gebiete des Raumes gelten, und dann allmählich vermittels uneigentlicher Punkte, Geraden und Ebenen das anfängliche Gebiet zu vervollständigen. (Vgl. § 22.)

Nachdem die projektive Geometrie entwickelt ist, können im Raume die metrischen Eigenschaften eingeführt werden, wenn man zu den anfänglichen Postulaten diejenigen hinzufügt, welche die Bewegungen oder die Kongruenz charakterisieren. Wenn man so vorgeht, findet man ein gewisses Polarsystem des Raumes, in dem jeder Ebene der (eigentliche oder uneigentliche) ihren Senkrechten gemeinsame Punkt entspricht; dies Polarsystem wird durch alle Bewegungen in sich selbst transformiert. Man beweist dann, daß die grundlegende Fläche 2. Grades für dies Polarsystem nur sein kann:

a) eine reelle nicht geradlinige Fläche 2. Grades,

b) eine imaginäre Fläche 2. Grades (mit reeller Gleichung),

c) eine als Punktort ausgeartete Fläche 2. Grades.

Man findet also auch auf diesem Wege die drei geometrischen Systeme, zu denen Riemann und Helmholtz gelangten, indem sie vom Begriff des Elementarabstandes ausgingen.

§ 25. Über die Unbeweisbarkeit des Postulats von Euklid. Bevor wir diese historische Auseinandersetzung schließen, scheint es uns nützlich, ein Wort über die Unbeweisbarkeit des Postulats von Euklid zu sagen.

Die Tatsache selbst, daß die unzähligen Beweisversuche nicht zu dem erhofften Ergebnis führten, kann den Zweifel entstehen lassen, daß es unbeweisbar ist, da der geometrische Instinkt uns zu bezeugen scheint, daß ein so einfacher Satz, wenn er beweisbar ist, es auf dem Wege gleich einfacher Betrachtungen sein müßte.

Aber derartige Betrachtungen können in keiner Weise als ein Beweis der fraglichen Unbeweisbarkeit angesehen werden.

Sieht man vom Postulat Euklids ab, so kann man, wenn man den Entwicklungen von Gauß, Lobatschefskij und Bolyai folgt, ein geometrisches Gebäude aufführen, in dem sich keine logischen Widersprüche finden, und das deshalb gerade die logische Möglichkeit der nichteuklidischen Hypothese zu bezeugen scheint, das will sagen die Unabhängigkeit des Euklidischen Postulats von den ersten Prinzipien der Geometrie und demgemäß seine Unbeweisbarkeit. Indes die Tatsache, „daß man keinen Widersprüchen begegnet ist“, genügt nicht, uns darüber Gewißheit zu geben; es ist notwendig, sich zu vergewissern, daß bei der Weiterführung der angegebenen Entwicklungen „man niemals solchen Widersprüchen begegnen kann“. Diese Überzeugung kann man in sicherer Weise aus der Betrachtung der Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie gewinnen. Wenn wir uns in der Tat auf das System aller Tripel von Zahlen (x, y, z) beziehen und dem Übereinkommen gemäß jedes Tripel als einen analytischen Punkt ansehen, so können wir den Abstand zweier analytischen Punkte definieren, wenn wir von den Formeln der oben genannten nichteuklidischen Trigonometrie ausgehen. So stellen wir ein analytisches System auf, das die Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrie beweist, da es eine übereinkunftgemäße Interpretation von ihr darbietet.

In diesem Sinne geben die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie von Lobatschewskij-Bolyai den Beweis der Unabhängigkeit

des Euklidischen Postulats von den ersten Prinzipien der Geometrie (die sich auf die Gerade, die Ebene und die Kongruenz beziehen. Vgl. Art. 3, 4, 5).

Man kann für die Unabhängigkeit selbst einen geometrischen Beweis suchen, indem man an die weiteren Entwicklungen anknüpft, deren wir Erwähnung getan haben.

Lassen wir also als logisch möglich die euklidische Geometrie zu.[1]) Alsdann bietet die Interpretation, welche die nichteuklidische und hyperbolische ebene Geometrie auf den Flächen mit negativer konstanter Krümmung erfährt, bis zu einem gewissen Punkte einen ersten Beweis der Unbeweisbarkeit des Euklidischen Postulats. Genau genommen wird so festgestellt, daß das genannte Postulat nicht bewiesen werden kann, wenn man sich auf die ersten, in einem begrenzten Gebiete der Ebenen geltenden Prinzipien der Geometrie stützt. In der Tat würde jeder logische Widerspruch, der aus der entgegengesetzten Hypothese hervorgehen würde, sich in einen Widerspruch in der Geometrie auf den Flächen mit konstanter negativer Krümmung umsetzen.

Indessen da die Gegenüberstellung zwischen der hyperbolischen Ebene und den Flächen mit konstanter negativer Krümmung, wie wir gesagt haben, nur für begrenzte Gebiete statt hat, so wird hierdurch nicht ausgeschlossen, daß das Euklidische Postulat nicht in der vollständigen Ebene bewiesen werden könnte. Um diesen Zweifel zu heben, würde es zweckmäßig sein, sich auf die abstrakten Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung zu beziehen, da es keine konkrete Oberfläche des gewöhnlichen Raumes gibt, in der die integrale hyperbolische Geometrie gilt (vgl. § 18).

Aber hieraus würde auch nur die Unbeweisbarkeit des Postulats von Euklid in der ebenen Geometrie nachgewiesen sein. Es bliebe also noch die Möglichkeit zu erörtern, ob man das Postulat etwa durch stereometrische Betrachtungen beweisen kann.

Die Begründung der Geometrie nach den Gesichtspunkten von Riemann (unter Ausdehnung der Begriffe der Geometrie auf den Flächen auf ein Gebiet von drei Dimensionen) bietet den vollständigen Beweis der Unbeweisbarkeit, der auf die Existenz eines nichteuklidischen analytischen Systems gegründet ist. Es handelt sich demgemäß um einen zweiten analytischen Beweis. Dasselbe kann man in betreff der Entwicklungen von Helmholtz und von Lie sagen; aber diese letzten bieten, kann man sagen, auch einen geome-

1) Vgl. Art. 1.

trischen Beweis, der von der Existenz von Transformationsgruppen des Euklidischen Raumes hergenommen ist, die den Bewegungsgruppen der nichteuklidischen Geometrie analog sind. Wohlverstanden ist es hier nötig, auf die Betrachtungen der Geometrie in ihrer Vollständigkeit den Blick zu richten.

Einfacher und geometrisch einleuchtender ist der Beweis der Unbeweisbarkeit des Euklidischen Postulats, der hergenommen ist von der Darstellung der nichteuklidischen Geometrie in der übereinkunftsgemäß für einen Kreis und eine Kugel hergestellten Metrik, die wir für den Fall der Ebene ausführlich entwickelt haben.

Die projektiven Metriken von Cayley-Klein bieten auch den Beweis der logischen Möglichkeit der elliptischen Hypothese, für die zur Interpretation die Geometrie des Bündels diente, wenn man sich auf den Fall der Ebene beschränkt.

Zweiter Teil.

Allgemeine Theorie der Parallelen.

§ 1. Grundlegende Sätze. Als Grundlage der allgemeinen Parallelenlehre nehmen wir diejenigen Postulate, die man in der gewöhnlichen Geometrie dem Studium der Parallelen voranzustellen pflegt, nämlich:

a) die Postulate der Bestimmung oder des Angehörens (Verknüpfung),

b) die Postulate über die Zerlegung der Geraden und der Ebene in Teile (Anordnung),

c) die Postulate der Kongruenz oder der Bewegung.

Wir werden ohne weiteres für bewiesen ansehen die Folgerungen, die man in den gewöhnlichen Verfahrungsweisen aus ihnen zieht, d. h.

1. die gewöhnlichen Kriterien für die Gleichheit (Kongruenz) von Dreiecken,
2. die Beziehungen zwischen den Elementen ein und desselben Dreiecks (Satz vom Außenwinkel[1]), die Sätze über gleichschenklige Dreiecke und über Dreiecke mit ungleichen Seiten usw.),
3. die Eigenschaften senkrechter und schiefer Strecken.

1) Der allerdings in der elliptischen Geometrie nicht gilt.

§ 2. Definition der Parallelen. Es sei A ein Punkt außerhalb der Geraden $b = B''B'$, P der Fußpunkt der von A auf b gefällten Senkrechten, HK die Senkrechte auf AP, die durch A geht. Faßt man einen der beiden anliegenden Winkel $\widehat{PAH}$, $\widehat{PAK}$, z. B. den ersten, ins Auge, so können die Geraden durch A, die ihm angehören, in zwei Klassen zerlegt werden, je nachdem sie die Gerade b schneiden oder nicht. Zur ersten Klasse gehören unendlich viele Elemente, nämlich alle Geraden, die A mit den Punkten der Halbgeraden PB' (s. Fig. 91) verbinden; zu der zweiten Klasse könnte ein einziges Element gehören, nämlich die Gerade KH, wie es in der euklidischen Geometrie der Fall ist.

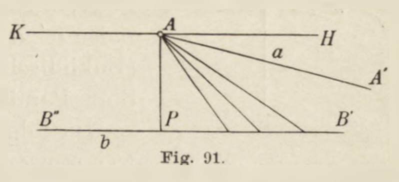


Fig. 91.

Gibt es ein Element der Trennung zwischen beiden Klassen?

Falls man zusammen mit den Postulaten a), b), c) des § 1 auch das Postulat der Stetigkeit zugesteht, so ergibt sich ohne weiteres, daß die beiden Klassen allen Bedingungen genügen, die für die Anwendung des Postulats verlangt werden; es folgt also die Existenz einer Geraden $a' \equiv AA'$, welche die b treffenden Geraden von den nicht treffenden scheidet.

Falls man dagegen die Stetigkeit der Geraden nicht postulieren und allein von den Postulaten des § 1 Gebrauch machen wollte, so würde man über die Existenz oder Nichtexistenz der Geraden a' nichts schließen können. Alsdann würde man im Anschluß an Hilbert die Existenz einer Geraden von $\widehat{PAH}$ postulieren können, welche die b Schneidenden von den Nichtschneidenden trennt.

Wie man auch vorgehen will, werden wir die Existenz einer Geraden $a' = AA'$ in $\widehat{PAH}$ als gegeben ansehen, die b nicht trifft und von der Eigenschaft ist, daß jede Gerade von $\widehat{PAA'}$ die Gerade b trifft.

Die Gerade $a' = AA'$ wird Parallele zu b durch den Punkt A genannt.

§ 3. Sinn der Parallelität. Es sei $a'' = AA''$ die Gerade, die für AP zu a' symmetrisch liegt. Offenbar besitzt a'' im Winkel $\widehat{PAK}$ dieselben Eigenschaften, die a' im Winkel $\widehat{PAH}$ zukommen. Auch a'' wird deshalb eine Parallele zu b durch A genannt werden.

Um, wo es nötig ist, die beiden Parallelen zu unterscheiden, kann

man bemerken, daß jeder von ihnen ein bestimmter Sinn von b zugeordnet ist.

In der vereinigten Figur wird man a' Parallele nach rechts und a'' Parallele nach links nennen können.

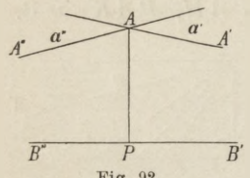


Fig. 92.

Wo es dann vorkommt, daß die beiden Geraden a', a'' in eine einzige Gerade zusammenfallen (Euklidischer Fall), ist diese gleichzeitig in beiderlei Sinn Parallele zu b.

Im folgenden beabsichtigen wir, wenn wir ohne weiteren Zusatz „AA' ist parallel zu BB'“ sagen, damit anzudeuten, daß der Sinn der Parallelität derjenige ist, der durch die Reihenfolge der Buchstaben B und B' bestimmt wird.

§ 4. Winkel des Parallelismus. Ist eine beliebige Strecke d gegeben, so errichte man in einem beliebigen B von $b = BB'$ die senkrechte Gerade und lege auf dieser die Strecke $AB \equiv d$ fest. Durch A ziehe man die Parallele $a' \equiv AA'$ zu b im Sinne BB'; der Winkel BAA' wird der dem Abstande $d \equiv AB$ entsprechende Winkel des Parallelismus genannt.

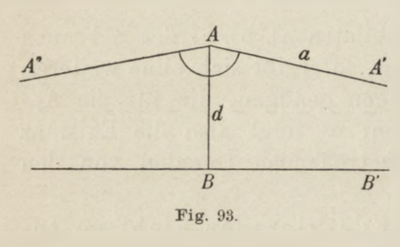


Fig. 93.

Aus den allgemeinen Eigenschaften der Kongruenz ergeben sich die folgenden Sätze:

1. Der Winkel des Parallelismus, der einer bestimmten Strecke entspricht, ist von dem Sinn des Parallelismus unabhängig. D. h. wenn AA' und AA'' Parallelen zu b, die erste die Parallele nach rechts, die zweite die Parallele nach links, sind, so sind die beiden Winkel $\widehat{BAA'}$ und $\widehat{BAA''}$ gleich.

2. Die gleichen Strecken entsprechenden Winkel des Parallelismus sind gleich.

§ 5. Erhaltung des Charakters der Parallelität. In der Definition der Parallelen scheint der Punkt A eine besondere Bedeutung zu haben. Man kann jedoch beweisen, daß die Definition von A unabhängig ist, nämlich den Satz:

Wenn $a \equiv AA'$ zur Geraden $b = BB'$ parallel ist durch A und A_1 ein beliebiger Punkt von a ist, so ist die Gerade a auch durch den Punkt A_1 zu b parallel.

Mit anderen Worten: Wenn eine Gerade zu einer anderen Geraden eine Parallele ist, so ist sie eine solche in allen ihren Punkten.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Der Punkt A_1 folge auf A in dem Sinne AA'. Alsdann sei A_1H ein Strahl des Winkels $\widehat{BA_1A'}$. Wenn der Punkt H auf der entgegengesetzten Seite von b für A_1 liegt, so trifft der Strahl A_1H sicherlich b; wenn H nicht auf der entgegengesetzten Seite von b für A_1 liegt, so ziehe man die Gerade AH. Da H dem Winkel $\widehat{BAA'}$ angehört, trifft die Gerade AH die Gerade BB' in einem Punkte M und die Strecke A_1B in einem Punkte N. Alsdann schneidet die Gerade A_1H die Seite NM des Dreiecks BMN und nicht die Seite BN. Hieraus folgt, daß A_1H notwendigerweise die dritte Seite $BM \equiv b$ schneiden wird.

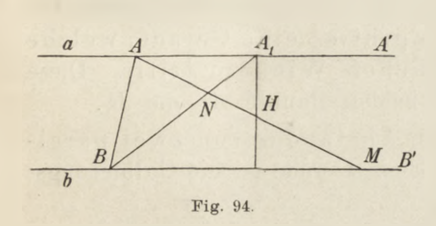


Fig. 94. Fig. 95.

2. Der Punkt A_1 gehe A in dem Sinne AA' voraus. Es sei A_1H ein beliebiger Strahl des Winkels $\widehat{BA_1A}$ und K ein Punkt auf der Verlängerung von A_1H. Die Gerade KA trifft, da sie dem Winkel $\widehat{BAA'}$ angehört, b in einem Punkte M, und die Strecke AB wird von A_1H in einem Punkte N getroffen werden. Alsdann wird die Gerade HK, welche die Seite AB des Dreiecks ABM und nicht AM trifft, notwendigerweise die dritte Seite $BM \equiv b$ treffen. Hiermit ist der Satz auch in diesem zweiten Falle bewiesen.

§ 6. Reziprozität des Charakters der Parallelität. Es handelt sich um den Beweis des Satzes:

Wenn $a \equiv AA'$ zu $b \equiv BB'$ parallel ist, so ist umgekehrt b zu a parallel.

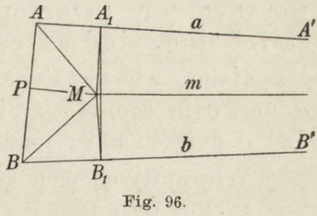


Fig. 96.

Man ziehe die Halbierungslinien der Winkel $\widehat{BAA'}$ und $\widehat{ABB'}$. Da a zu b parallel ist, so wird die Halbierungslinie von $\widehat{BAA'}$ b treffen und infolgedessen auch die andere Winkelhalbierende in einem Punkte M. Wenn wir von M auf a, b und AB die Senkrechten fällen, so sind die drei Strecken MA_1, MB_1, MP zwischen M und den genannten Geraden einander gleich.

Andererseits wenn man durch M die Halbierungslinie m des Winkels $A_1\widehat{M}B_1$ zieht, so sagt die Gleichheit zwischen MA_1 und MB_1, daß die Punkte A_1 und B_1 für m symmetrisch sind; demgemäß werden sich auch die beiden Geraden a und b, die auf MA_1 und MB_1 in A_1 und B_1 senkrecht sind, als symmetrisch für m erweisen. Diese Symmetrie gibt uns ohne weitere Entwicklungen das Recht, zu behaupten, daß, wofern a zu b parallel ist, umgekehrt b zu a parallel ist.

Nachdem so die Erhaltungsmäßigkeit und die Reziprozität der Parallelität festgestellt ist, können wir im folgenden einfach von parallelen Geraden sprechen.

Aus der soeben entwickelten Schlußreihe und aus der Figur, auf die sie sich bezieht, leitet man ohne weiteres die folgenden Zusätze ab:

Wenn a zu b parallel ist, so gibt es eine Gerade, welche die beiden Parallelen unter gleichen Winkeln trifft. Diese Gerade ist die Verbindungslinie der beiden Punkte A_1 und B_1.

Der Ort der Punkte gleichen Abstandes von zwei parallelen Geraden ist eine Gerade. Diese Gerade ist die Halbierungslinie des Winkels $A_1\widehat{M}B_1$, also m.

§ 7. Streifen. Zwei parallele Geraden bestimmen einen Streifen, von dem sie die Schenkel sind. Es gehören zu dem Streifen die Schenkel und die Punkte der Ebene, die in bezug auf jeden Schenkel auf der Seite liegen, auf der sich der andere Schenkel befindet.

Wenn a und b die Schenkel des Streifens sind, so wird der Streifen durch das Symbol (ab) bezeichnet.

Die Gerade m, der Ort der Punkte der Ebene, die von a und b gleich weit entfernt sind, nennt man Halbierungslinie des Streifens.

§ 8. Transitivität des Charakters der Parallelität. Zwei Geraden, die in einem bestimmten Sinne einer dritten parallel sind, sind unter sich parallel.

Haben wir die Geraden $a \equiv AA'$, $b \equiv BB'$, $c \equiv CC'$, und sind a und c in demselben Sinne zu b parallel, so behaupte ich, daß a und c untereinander parallel sind.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. (Fig. 97.) Es mögen a und c auf entgegengesetzten Seiten von b liegen, also einander nicht schneiden. B sei der Schnittpunkt von b mit der Strecke AC. Man nehme in dem Winkel $C\widehat{A}A'$ den Strahl AH an und bestimme den Punkt M, in dem er b schneidet. Die Gerade

MH gehört dem Winkel $\widehat{CMB'}$ an, deshalb wird sie, da b zu c parallel ist, c schneiden. Dieselbe Schlußfolgerung gilt für eine beliebige andere Gerade in $\widehat{CAA'}$, folglich ergibt sich a als zu c parallel.

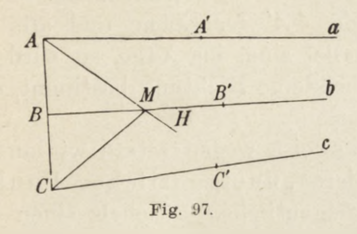


Fig. 97.

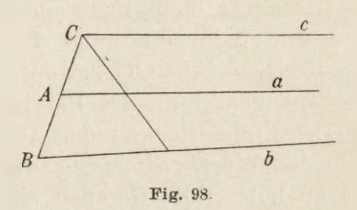


Fig. 98.

2. (Fig. 98.) Es mögen a und c auf derselben Seite von b liegen. Die beiden Geraden a und c können sich nicht schneiden, da durch einen Punkt nur eine einzige Parallele zu b in dem Sinne BB' geht. Alsdann wird eine von ihnen, z. B. a, dem Streifen angehören, der b und c zu Schenkeln hat. Verbindet man B und C, so bezeichne A den Schnittpunkt von CB mit a. Jeder Strahl des Winkels $\widehat{BCC'}$ wird, da er b treffen muß, notwendigerweise a treffen: hieraus ist auch in diesem Falle die Parallelität zwischen a und c erwiesen.

§ 9. Uneigentliche Büschel und uneigentliche Punkte. Das System aller Geraden der Ebene, die zu einer angegebenen Geraden der Ebene in einem bestimmten Sinne parallel sind, besitzt zwei Eigenschaften:

1. Durch einen beliebigen Punkt der Ebene geht eine und nur eine Gerade des Systems;

2. Zwei beliebige Geraden des Systems bestimmen dies vollständig.

Aber diese Eigenschaften kommen auch dem Büschel von Geraden zu (der Gesamtheit aller Geraden, die durch einen Punkt gehen); aus diesem Grunde kann man unter Erweiterung des Sinnes des Wortes Büschel mit ihm auch die Gesamtheit der Geraden bezeichnen, die zu einer gegebenen Geraden in einem bestimmten Sinne parallel sind.

Wo es später nötig sein sollte, das eine der beiden Büschel von dem anderen zu unterscheiden, werden wir von den Eigenschaftswörtern „eigentlich“ und „uneigentlich“ Gebrauch machen; insbesondere werden wir eigentliches Büschel dasjenige nennen, das von allen durch einen Punkt gehenden Geraden gebildet wird, uneigentliches Büschel das andere.

Alle Geraden des eigentlichen Büschels haben einen Punkt, den Mittelpunkt (das Zentrum) des Büschels, gemeinsam; die Geraden des uneigentlichen Büschels haben nicht irgend einen Punkt gemeinsam. Jedoch haben diese letzten eine Richtung gemeinsam.

In der Tat faßt man eine Gerade AA' der Ebene und alle Geraden, die zu ihr im Sinne AA' parallel sind, ins Auge, so wird auf jeder Geraden BB', CC' ... des Büschels eine Richtung bestimmt, entsprechend dem Sinn des Parallelismus.

Der Einheitlichkeit der Ausdrucksweise wegen setzen wir an die Stelle des Wortes Richtung das andere „uneigentlicher Punkt“. Alsdann haben alle Geraden eines uneigentlichen Büschels einen uneigentlichen Punkt gemeinsam. Dieser Punkt soll uneigentlicher Mittelpunkt (Zentrum) des Büschels genannt werden.

Für die Rechtfertigung der Einführung des uneigentlichen Büschels und Punktes haben dieselben Überlegungen Geltung, die in der gewöhnlichen Geometrie zum Begriff des Punktes im Unendlichen führen.

Im folgenden werden die uneigentlichen Punkte stetig mit großen Buchstaben des griechischen Alphabets bezeichnet werden. Wenn wir so sagen, daß die Geraden a und b den Punkt Ω gemeinsam haben, so beabsichtigen wir damit stillschweigend die Parallelität von a und b anzugeben.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß eine Gerade vermittels eines ihrer eigentlichen Punkte und eines uneigentlichen Punktes Ω bestimmt werden kann. Dies kraft des Prinzips, daß es durch A zu einer gegebenen Geraden in einem bestimmten Sinne nur eine einzige Parallele gibt.

§ 10. Dreiseite und ihre Eigenschaften. Es seien $A\Omega$ und $B\Omega$ die Schenkel eines Streifens. Die Figur, die von der Strecke AB und den Strahlen (Halbgeraden) $A\Omega$ und $B\Omega$ gebildet wird, soll Dreiseit heißen. Die Punkte A, B, Ω sind die Ecken des Dreiseits; Ω ist die uneigentliche Ecke.

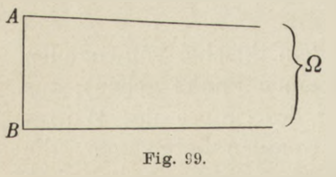


Fig. 99.

Die Punkte der Strecke AB zusammen mit den Punkten des Streifens, die mit Ω sich auf derselben Seite von AB befinden, bilden die Fläche des Dreiseits. Es folgt die Definition der inneren Punkte und die Geltung der folgenden Sätze:

Eine Gerade, die durch eine Ecke des Dreiseits und durch einen seiner inneren Punkte geht, trifft die gegenüberliegende Seite.

Eine Gerade, die nicht durch die Ecken des Dreiseits geht und eine seiner Seiten trifft, trifft noch eine andere Seite und nur noch eine.

Die Winkel $\widehat{AB}\Omega$ und $\widehat{BA}\Omega$ heißen Winkel des Dreiseits, und man bezeichnet sie kurz mit $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$. Die Nebenwinkel zu $\widehat{A}$ und zu $\widehat{B}$ sind die Außenwinkel. Alsdann haben wir:

In einem Dreiseit ist ein Außenwinkel größer oder eben so groß wie der gegenüberliegende innere Winkel.

Ein Dreiseit, in dem $\widehat{A}$ gleich $\widehat{B}$ ist, heißt gleichschenklig.

Zwei Dreiseite $AB\Omega$ und $A_1B_1\Omega_1$ heißen gleich (kongruent), wenn $AB = A_1B_1$, $\widehat{A} = \widehat{A}_1$ und $\widehat{B} = \widehat{B}_1$ ist.

Es gelten dann folgende Kriterien der Gleichheit (Kongruenz).

1. Zwei Dreiseite $AB\Omega$ und $A_1B_1\Omega_1$ mit den gleichen Seiten AB und A_1B_1 und mit den gleichen Winkeln $\widehat{A}$ und $\widehat{A}_1$ sind gleich, sie haben auch die anderen beiden Winkel $\widehat{B}$ und $\widehat{B}_1$ gleich.

Als besonderen Fall haben wir, daß zwei rechtwinklige Dreiseite gleich sind, wenn sie die Kathete AB gleich der Kathete A_1B_1 haben.

2. Zwei gleichschenklige Dreiseite sind gleich, wenn die Seite AB des ersten der Seite A_1B_1 des zweiten gleich ist.

Wir übergehen die leichten Beweise.

§ 11. Einige Sätze der Stereometrie. Parallele Geraden im Raume. Wir wollen ohne weiteres alle Eigenschaften des Raumes als festgestellt ansehen, die ausschließlich auf den Postulaten a), b), c) des § 1 beruhen, und genauer

1. die Sätze über senkrechte Ebenen und Geraden,

2. die Sätze über die Schnitte der Flächenwinkel und insbesondere den Satz: Bei gleichen Flächenwinkeln sind gleichgeneigte Schnitte gleich und umgekehrt.

3. Die Sätze über dreiseitige Ecken (Trieder) und die bezüglichen Kriterien der Gleichheit.

Nachdem dies festgesetzt ist, stellen wir einige Sätze über parallele Geraden im Raume auf.

Wenn drei Ebenen, die nicht durch eine und dieselbe Gerade gehen, sich gegenseitig schneiden und zwei der Schnittgeraden parallel sind, so ist auch die dritte zu ihnen parallel.

Es seien AA', BB', CC' die Schnittlinien der Ebenen und AA' ergebe sich als parallel zu BB'.

Zunächst ist klar, daß die Gerade CC' nicht die anderen beiden schneidet; deshalb wird es genügen, zu beweisen, daß jede Gerade des Winkels $\widehat{BCC'}$ die Gerade BB' schneidet.

Es sei CD eine Gerade von $\widehat{BCC'}$. Wenn man von der Geraden BC aus die Gerade CD projiziert, so wird die projizierende Ebene die Ebene der Parallelen AA', BB' längs einer Geraden des Winkels $\widehat{BAA'}$ schneiden, also längs einer Geraden, die BB' schneidet.

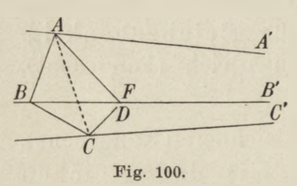


Fig. 100.

Heißt F der Punkt, in dem die fragliche Gerade BB' schneidet, so ist klar, daß die Gerade CD auch durch F geht; das bedeutet gerade, daß CD eine Schneidende für BB' ist, q. e. d. Also ist CC' parallel zu BB'.

In derselben Weise beweist man die Parallelität der beiden Geraden CC' und AA'.

Es folgen unmittelbar die Zusätze:

Wenn zwei Ebenen, die durch parallele Geraden gehen, sich schneiden, so ist ihr Schnitt eine zu diesen parallele Gerade.

Zwei Geraden, die in einem und demselben Sinne einer dritten parallel sind, sind in jenem Sinne untereinander parallel.

Dieser letzte Satz lehrt uns, daß die Transitivität des Parallelismus auch bestehen bleibt, wenn die Geraden nicht derselben Ebene angehören.

§ 12. Geraden, die einer Ebene parallel sind. Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn sie sich zu einer in der Ebene liegenden Geraden als parallel ergibt. Umgekehrt ist die Ebene zu der Geraden parallel.

Es gilt alsdann der Satz:

Eine Gerade, die einer Ebene parallel ist, ist allen Geraden eines uneigentlichen Büschels parallel, das in der Ebene liegt.

Das fragliche Büschel erhält man, wenn man die Ebene durch alle Ebenen, die durch die Gerade gehen, schneidet. Dies ergibt sich aus den im vorhergehenden § festgestellten Eigenschaften.

Ein anderer bemerkenswerter Satz ist der folgende:

Durch eine Gerade $a \equiv AA'$, die einer Ebene α parallel ist, geht eine und nur eine Ebene, die α nicht schneidet.

Beweisen wir vor allem, daß es durch a eine α nicht schneidende Ebene gibt.

Es sei β die Ebene durch a, die auf α senkrecht steht, und α' die Ebene durch a, die auf β senkrecht steht. Die so erhaltene Ebene α' schneidet α nicht. In der Tat, bezeichnet man mit b den Schnitt von α und β und mit a' einen angenommenen Schnitt von α' und α, so müßten sich die drei Geraden a, b, a' als parallel ergeben. Da andererseits die Ebenen α und α' beide auf β senkrecht sind, so müßte die Gerade a' auf β senkrecht sein, also a und b treffen, was dem Vorhergehenden widerspricht.

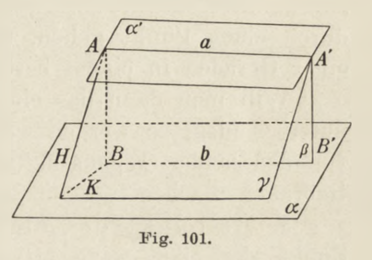


Fig. 101.

Nachdem festgestellt ist, daß α und α' sich nicht schneiden, gehen wir dazu über, zu zeigen, daß jede andere Ebene durch a, die von α' verschieden ist, α schneidet.

Es sei γ eine von α' verschiedene Ebene durch a und AB die von A in a auf α gefällte Senkrechte. Die Ebene γ ist sicherlich nicht senkrecht auf AB.

Nun ist der Winkel $\widehat{HAB}$, der von γ mit AB gebildet wird, kleiner als der Winkel $\widehat{A'AB}$, nämlich kleiner als der Winkel des Parallelismus, der dem Abstande AB entspricht.

Dann treffen sich in der Ebene HAB, die α längs BK schneidet, die beiden Geraden AH und BK; aus diesem Grunde ergeben sich auch die beiden Ebenen γ und α, die durch sie hindurchgehen, als sich schneidend. Hiermit ist der Satz bewiesen.

§ 13. Parallele Ebenen. Zwei Ebenen, die durch zwei parallele Geraden gehen und einander nicht schneiden, heißen parallel.

Nunmehr kann der bewiesene letzte Satz unter folgender Form ausgesprochen werden:

„Durch eine Gerade, die einer Ebene parallel ist, geht eine einzige Ebene, die der gegebenen Ebene parallel ist.“

§ 14. Uneigentliches Bündel. Es ist bekannt, daß das System der Geraden des Raumes, die durch einen eigentlichen Punkt gehen (Geradenbündel), die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht eine und nur eine Gerade des Systems.

2. Zwei beliebige seiner Geraden liegen in einer Ebene und bestimmen es vollständig.

Da diese Eigenschaften auch dem System der Geraden zukommen, die einer gegebenen Geraden in einem bestimmten Sinne parallel sind, so führen sie dazu, die Bedeutung des Wortes Bündel zu erweitern zur ununterschiedlichen Bezeichnung der Gesamtheit der Geraden, die durch einen Punkt gehen, und der Gesamtheit der Geraden, die zu einer Geraden in einem bestimmten Sinne parallel sind.

Will man dann das eine der beiden Geradensysteme vom andern unterscheiden, so werden wir, wie schon bei den Büscheln (vgl. § 9), von den beiden Eigenschaftswörtern eigentlich und uneigentlich Gebrauch machen.

Mittelpunkt des eigentlichen Bündels ist der eigentliche Punkt, der allen seinen Geraden gemeinsam ist; Mittelpunkt des uneigentlichen Bündels ist der uneigentliche Punkt (Richtung), der allen Geraden des uneigentlichen Bündels gemeinsam ist.

§ 15. Grundlagen einer Geometrie im uneigentlichen Bündel. In der Geometrie betrachtet man die Ebene als Träger aller ihrer Punkte und Geraden. Diese Punkte und diese Geraden sind miteinander durch eine gewisse Gruppe von ursprünglichen Sätzen (Postulaten) verknüpft, die, in geeigneter Weise miteinander konbiniert, zu den mannigfachen Sätzen der Planimetrie führen. In ganz analoger Weise kann man eine Geometrie im uneigentlichen Bündel Ω aufbauen, indem man als grundlegende Elemente seine Geraden und seine Ebenen nimmt. Nur ist es für das Bündel Ω nicht nötig, die ersten Sätze zu postulieren, da einige von ihnen uns kraft dessen, was in den vorhergehenden Paragraphen gesagt ist, schon bekannt sind, und die anderen, wenn man von geeigneten Definitionen ausgeht, leicht nachgewiesen werden können.

Die Eigenschaften des Bündels Ω, die den Postulaten der ebenen Geometrie der Bestimmung (Verknüpfung), Zerlegung in Teile (Anordnung) entsprechen, können ohne weiteres ausgesprochen werden, wenn man in den fraglichen Postulaten die Worte Punkte, Gerade in die anderen Gerade, Ebene umändert. Dies ergibt sich aus dem, was im Vorhergehenden auseinandergesetzt worden ist. Die Folgerungen, die in der ebenen Geometrie aus den genannten Postulaten abgeleitet werden, übertragen sich leicht in ebenso viele Eigenschaften von Ω. Zu ersetzen haben wir in Ω die Strecke durch Streifen, den Winkel

durch Flächenwinkel. Zwei Ebenen in Ω heißen parallel, wenn sie sich nicht schneiden

Alsdann liefert der Satz des § 13 den folgenden Satz in Ω:

„Durch eine Gerade geht eine und nur eine parallele Ebene zu einer gegebenen Ebene."

§ 16. Das Prinzip der Kongruenz in der Geometrie des uneigentlichen Bündels. Kongruenz zwischen Flächenwinkeln. Um das System der grundlegenden Sätze von Ω zu vervollständigen, ist es notwendig, den Begriff der Kongruenz einzuführen.

Wir beginnen mit den Flächenwinkeln.

Zwei Flächenwinkel von Ω nennt man kongruent oder gleich, wenn sie im gewöhnlichen Sinne des Wortes gleich sind.

Dann liefern die gewöhnlichen Eigenschaften über die Gleichheit, über die Summe usw von Flächenwinkeln ebenso viele Eigenschaften in der Geometrie von Ω.

So werden die Bezeichnungen: rechter Flächenwinkel, spitzer Flächenwinkel..., Komplement-, Supplementflächenwinkel..., senkrechte Ebenen usw., in der Geometrie des uneigentlichen Bündels in denselben Bedeutungen gebraucht werden, die ihnen im Raume zukommen.

Wir werden alsdann den folgenden Satz aussprechen können:

„Zwei Ebenen von Ω schneiden sich, wenn sie mit einer dritten Ebene von Ω auf derselben Seite zwei innere Flächenwinkel bilden, die nicht Supplemente sind." (Vgl. § 15).

Außerdem ist es leicht, den folgenden Satz zu beweisen:

„Wenn α und β zwei sich gegenseitig schneidende Ebenen von Ω sind und γ und δ zwei andere beziehungsweise auf α und β senkrechte Ebene von Ω, so schneiden sich auch γ und δ gegenseitig."

Das Beweisverfahren geht gleichen Schrittes mit dem vor, das man in der Euklidischen Geometrie entwickelt, wenn man den Satz beweist: „Zwei Geraden c, d, die beziehungsweise auf zwei sich schneidenden Geraden a, b senkrecht sind, schneiden sich gegenseitig." Wir übergehen deshalb die Entwicklung.

§ 17. Der Satz von J. Bolyai. Um die Gleichheit zwischen Streifen definieren zu können, ist es notwendig, einige Betrachtungen vorauszuschicken.

Es seien $a, b, c, d \ldots$ Geraden von Ω und A ein beliebiger Punkt von a. Zieht man die Halbierungslinie des Streifens (ab) [vgl. § 6, 7], so wird die von A auf sie gefällte Senkrechte b in einem solchen Punkte B treffen, daß

$$\Omega\widehat{AB} = \Omega\widehat{BA}.$$

Der Punkt B werde der entsprechende von A auf B genannt. In derselben Weise kann man die Punkte $C, D \ldots$ bestimmen, die zu A beziehungsweise auf c, d entsprechend sind. Auf jeder Geraden gibt es also einen und nur einen zu A entsprechenden Punkt. Es handelt sich nun darum, folgendes zu beweisen:

„Wenn die Punkte $B, C, D \ldots$ zu A entsprechend sind, so werden $A, C, D \ldots$ zu B, A, B, D zu C usw. entsprechend sein." (Satz von Bolyai.)

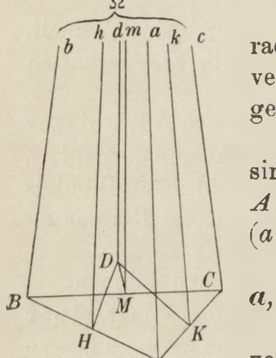


Fig. 102.

Es wird hierzu genügen, zu zeigen, daß die Gerade, die zwei beliebige zu A entsprechende Punkte verbindet, die beiden Geraden, die durch sie hindurchgehen, unter gleichen Winkeln schneidet.

Wenn B und C die zu A entsprechenden Punkte sind, die auf b und c liegen, so treffen die Strecken AB und AC die Schenkel der bezüglichen Streifen (ab), (ac) unter gleichen Winkeln.

Setzen wir zunächst voraus, daß die Geraden a, b, c nicht derselben Ebene angehören.

Bezeichnet man mit h und k die Halbierungslinien von (ab) und (ac), so werden die Ebenen, die in der Mitte der Strecken AB und AC senkrecht stehen, da sie beziehungsweise h und k enthalten, zu Ω gehören. Außerdem werden sie, da sie auf zwei sich schneidenden Ebenen ab, ac senkrecht sind, eine Gerade von Ω gemeinsam haben, die wir mit d bezeichnen wollen.

Die Punkte dieser Geraden sind von B und C gleich weit entfernt; deshalb werden sie der Ebene angehören, die auf der Strecke BC in dem Mittelpunkt M senkrecht steht. Die Gerade m, längs der die fragliche Ebene die Ebene bc schneidet, ist zu b und zu c parallel; hierdurch werden zwei rechtwinklige Dreiseite $BM\Omega$ und $CM\Omega$ mit den gleichen Katheten BM und CM bestimmt. Alsdann ergeben sich infolge eines bekannten Kriteriums der Gleichheit zwischen Dreiseiten (vgl. § 10) die beiden fraglichen Dreiseite als gleich, d. h. es besteht die Winkelgleichung:

$$\Omega\widehat{BM} = \Omega\widehat{CM}.$$

Die Gerade BC trifft also die Geraden b und c unter gleichen Winkeln. q. d. e.

In dem Falle, in dem die Geraden a, b, c einer Ebene angehören, beweist man den Satz, indem man eine vierte Gerade von Ω hinzunimmt, die nicht mit a, b, c derselben Ebene angehört.

In der Tat, wenn d eine Gerade von Ω ist, die nicht mit a, b, c derselben Ebene angehört, und B, C, D die zu A entsprechenden Punkte sind, so treffen infolge des vorhergehenden Satzes die Strecken BD und CD die Schenkel der bezüglichen Streifen (bd) und (cd) unter gleichen Winkeln. Folglich schneidet auch die Strecke BC die Geraden b und c unter gleichen Winkeln.

Hiermit ist der Satz auch in dem Falle festgestellt, in dem a, b, c derselben Ebene angehören.

§ 18. Kongruenz zwischen Streifen. Nachdem dies festgestellt ist, definiert man in folgender Weise in Ω die Kongruenz zwischen Streifen.

Es seien (ab) und (cd) zwei Streifen von Ω und A, B, C, D auf a, b, c, d liegende einander entsprechende Punkte. Wenn die Strecke AB der Strecke CD gleich ist, dann nennt man den Streifen (ab) dem Streifen (cd) gleich.

Man beachte vor allem, daß die Definition von der Gruppe der vier entsprechenden Punkte A, B, C, D unabhängig ist.

In der Tat, wenn A', B', C', D' andere beziehungsweise auf a, b, c, d gewählte entsprechende Punkte sind, so sind die Strecken $A'B'$ und $C'D'$ einander gleich, wenn AB und CD einander gleich sind, und umgekehrt.

Dies ergibt sich aus den allgemeinen Eigenschaften der Kongruenz im Raume.

Die so definierte Gleichheit zwischen Streifen genügt offenbar den formalen Gesetzen der Gleichheit zwischen Strecken; außerdem ergibt sich aus den allgemeinen Eigenschaften der Kongruenz im Raume der Satz:

„Wenn a, b, c drei Geraden von Ω sind und γ eine beliebige Ebene durch c, so gibt es in jeder der beiden durch c in γ bestimmten Halbebenen einen Streifen (cd), der dem Streifen (ab) gleich ist."

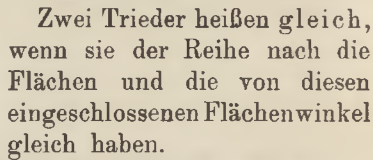
Führt man dann in Ω den Begriff der Summe von Streifen ein, so wird man bald nachweisen können, daß die Summe von Streifen den formalen Gesetzen der Summe von Strecken genügt.

§ 19. Trieder. — Gleichheit von Triedern. — 1. Kriterium der Gleichheit. Es bleibt schließlich noch in Ω derjenige Satz festzustellen, der dem 1. Kriterium der Gleichheit (Kongruenz) zwischen Dreiecken entspricht.

Wir schicken die Definition des Trieders voraus.

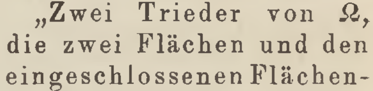
Drei nicht derselben Ebene angehörige Geraden a, b, c von Ω zusammen mit den drei Streifen (ab), (bc), (ca), die sie zu je zweien bestimmen, machen ein Trieder aus. Die Streifen (ab), (bc), (ca) heißen Flächen des Trieders usw.

Fig. 103.

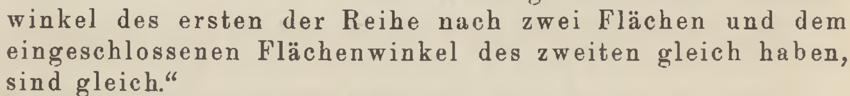


Zwei Trieder heißen gleich, wenn sie der Reihe nach die Flächen und die von diesen eingeschlossenen Flächenwinkel gleich haben.

Das 1. Kriterium der Gleichheit zwischen Triedern ist das folgende:



„Zwei Trieder von Ω, die zwei Flächen und den eingeschlossenen Flächenwinkel des ersten der Reihe nach zwei Flächen und dem eingeschlossenen Flächenwinkel des zweiten gleich haben, sind gleich."



Es seien abc und $a'b'c'$ die beiden Trieder mit

$$(1) \qquad \begin{cases} (ab) = (a'b') \\ (bc) = (b'c') \end{cases}$$

$$(2) \qquad \widehat{b} = \widehat{b}'.$$

Um die Gleichheit der übrigen Elemente der beiden Trieder nachzuweisen, fassen wir auf a einen beliebigen Punkt A und die entsprechenden B, C, A', B', C' zu A auf den Geraden b, c, a', b', c' ins Auge. Infolge von (1) werden dann die Streckengleichungen bestehen:

$$AB = A'B'$$
$$BC = B'C';$$

aus diesen folgert man unter Anwendung des Gleichheitskriteriums für die gleichschenkligen Dreiseite (vgl. § 10) die Winkelgleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \Omega\widehat{AB} = \Omega\widehat{BA} = \Omega\widehat{A'B'} = \Omega\widehat{B'A'}, \\ \Omega\widehat{BC} = \Omega\widehat{CB} = \Omega\widehat{B'C'} = \Omega\widehat{C'B'}. \end{cases}$$

Diese letzten sagen aus, daß die Winkel $A\widehat{B}C$ und $A'\widehat{B'}C'$ gleich geneigte Schnitte der beiden Flächenwinkel $\widehat{b}$ und $\widehat{b'}$ sind, und da diese Flächenwinkel gleich sind, wird sich ergeben:

$$A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'.$$

Wenn wir nun die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ vergleichen, die zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel des ersten zweien Seiten und dem eingeschlossenen Winkel des zweiten gleich haben, so ergeben sich die Beziehungen:

$$AC = A'C'$$

$$B\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C'$$

$$B\widehat{C}A = B'\widehat{C'}A'.$$

Die erste von diesen geht über in die Gleichung:

$$(ac) = (a'c');$$

die anderen beiden drücken infolge des Satzes über die gleich geneigten Schnitte zweier Flächenwinkel die Gleichheit der Flächenwinkel $\widehat{a}$ und $\widehat{a'}$ und der Flächenwinkel $\widehat{c}$ und $\widehat{c'}$ aus.

Wir schließen demgemäß, daß die beiden Trieder $\boldsymbol{abc}$ und $\boldsymbol{a'b'c'}$, da sie die Elemente paarweise gleich haben, gleich sind. q. d. e.

§ 20. Identität der Geometrie des uneigentlichen Bündels und der Euklidischen Geometrie. Wenn man die Postulate der Euklidischen ebenen Geometrie mit den grundlegenden Eigenschaften des uneigentlichen Bündels in Vergleich stellt, so erkennt man, daß diese aus jenen hervorgehen, wenn man einfach die Worte Punkt, Gerade, Strecke, Winkel usw. mit den anderen Gerade, Ebene, Streifen, Flächenwinkel usw. vertauscht. Infolgedessen können alle Sätze der Euklidischen Geometrie ohne weiteres in ebensoviele Sätze der Geometrie von Ω übertragen werden, indem man in ihnen die genannten Vertauschungen der Worte vornimmt. Man wird demgemäß schließen können:

Die Geometrie von Ω ist mit der ebenen Geometrie von Euklid identisch. Insbesondere: Die Trigonometrie von Ω fällt mit der gewöhnlichen Trigonometrie zusammen.

§ 21. Grenzkreis. Grenzkugel. Die Kugel kann als Ort der Punkte definiert werden, die zu einem gegebenen Punkte für die Geraden eines eigentlichen Bündels symmetrisch sind. In analoger

Weise kann man ein neues geometrisches Gebilde definieren, das wir Grenzkugel nennen wollen. Die Grenzkugel ist der Ort der Punkte, die zu einem gegebenen Punkte für die Geraden eines uneigentlichen Bündels symmetrisch sind.

Wenn wir uns an die Definition der entsprechenden Punkte (vgl. § 17) erinnern, so ist folgendes klar:

Die Grenzkugel ist der Ort der Punkte, die zu einem gegebenen Punkte auf den verschiedenen Geraden eines uneigentlichen Bündels entsprechend sind.

Der Ausgangspunkt, den man für die Erzeugung der Grenzkugel wählt, ist ein beliebiger Punkt der Fläche, also:

Ein beliebiger anderer Punkt der Grenzkugel kann als grundlegender Punkt zu ihrer Erzeugung gewählt werden.

Dies ergibt sich aus dem Satz von Bolyai (vgl. § 17).

Der Mittelpunkt Ω des Bündels soll (uneigentlicher) Mittelpunkt der Grenzkugel genannt werden; die Halbgeraden, welche die Punkte der Grenzkugel mit Ω verbinden, nennt man Radien der Grenzkugel. Die Strecke, die zwei Punkte der Grenzkugel verbindet, ist eine Sehne von ihr usw.

Eine Ebene, die durch Ω geht, schneidet die Grenzkugel in einer Linie, die wir Grenzkreis nennen wollen.

Der Grenzkreis ist der Ort der Punkte, die zu einem beliebigen seiner Punkte für die Geraden eines uneigentlichen Büschels symmetrisch sind.

Der Mittelpunkt des Büschels heißt (uneigentlicher) Mittelpunkt des Grenzkreises usw.

Sowohl die Grenzkugel als auch der Grenzkreis stellen sich der Anschauung als Grenzfiguren beziehungsweise der Kugel und des Kreises dar, wenn der Radius unbegrenzt wächst.

§ 22. Geometrie der Grenzkugel. Ihre Identität mit der Euklidischen ebenen Geometrie. Jedem Punkte einer Grenzkugel mit dem Mittelpunkte Ω lassen wir die Gerade entsprechen, die ihn von Ω aus projiziert. Man erhält so eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen der Grenzkugel und dem Bündel, aus der man unmittelbar die folgenden grundlegenden Sätze der Geometrie auf der Grenzkugel entnimmt:

1. Zwei Punkte der Grenzkugel gehören einem Grenzkreise an und nur einem.

2. Die Punkte eines Grenzkreises sind in zweierlei Reihenfolgen oder Sinn angeordnet, von denen der eine dem andern entgegengesetzt ist usw.

3. Ein Grenzkreis zerlegt die Grenzkugel in zwei Teile, von denen jeder unendlich viele Punkte enthält usw.

Es folgen alsdann wie in der gewöhnlichen Geometrie die Definitionen der Strecke eines Grenzkreises, des Winkels zweier Grenzkreise usw.

Den Kongruenzbegriff führt man dann vermittels folgender Definitionen ein:

Zwei Grenzkreisstrecken sind gleich, wenn die entsprechenden Streifen gleich sind; zwei Grenzkreiswinkel sind gleich, wenn die entsprechenden Flächenwinkel von Ω gleich sind.

4. Für die so festgesetzte Gleichheit von Strecken und Winkeln auf der Grenzfläche gelten die formalen Gesetze der ebenen Geometrie für die Gleichheit zwischen Strecken und Winkeln.

Weiter kann man das Grenzkugeldreieck (mit Grenzkreisseiten) und die Gleichheit zwischen zwei Dreiecken definieren. Dann erlaubt uns der Satz des § 19, folgendes Kriterium der Gleichheit zwischen Dreiecken auszusprechen:

5. Zwei Grenzkugeldreiecke, die zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel des ersten zweien Seiten und dem eingeschlossenen Winkel des zweiten bezüglich gleich haben, sind gleich.

Endlich nennt man zwei Grenzkreise, die derselben Grenzkugel angehören, parallel, wenn sie keine Punkte gemeinsam haben. Alsdann hat man kraft des letzten Satzes von § 15:

6. Durch einen Punkt der Grenzkugel geht ein und nur ein Grenzkreis, der einem angegebenen Grenzkreise parallel ist.

Stellen wir nun die vorhergehenden Ergebnisse mit den grundlegenden Sätzen der Euklidischen ebenen Geometrie in Vergleich, so ist klar, daß man von der einen zur anderen durch einfache Wortvertauschungen gelangt und insbesondere durch Vertauschung der Worte Grenzfläche, Grenzkreis usw. mit den Worten Ebene, Gerade usw. und umgekehrt.

Demgemäß werden wir also schließen können:

Die Geometrie der Grenzkugel ist mit der Euklidischen ebenen Geometrie identisch.

Insbesondere: Die gewöhnliche ebene Trigonometrie ist, wie sie auch immer in der euklidischen Ebene begründet werden mag, auch auf der Grenzfläche gültig.

Hyperbolische Geometrie.

§ 23. Die Parallelen in der hyperbolischen Geometrie. Die Eigenschaften der Ebene und des Raumes, die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelt worden sind, gelten sowohl für die Hypothese, nach der man durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen kann, als auch für die andere, nach der man deren zwei ziehen kann.

Wir nehmen nun ausdrücklich die letzte dieser Hypothesen an und stellen mit Hilfe des Postulats von Archimedes folgendes fest:

Wenn es durch einen Punkt der Ebene zu einer Geraden zwei Parallelen gibt, so gibt es durch jeden Punkt der Ebene zwei Parallelen zu derselben Geraden.

Es seien $a' \equiv AA'$ und $a'' \equiv AA''$ die beiden Parallelen durch A zu der Geraden $b \equiv B''B'$, ferner M ein beliebiger Punkt der Ebene.

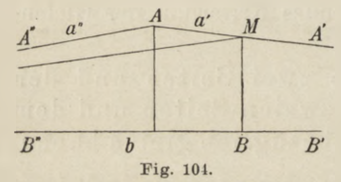


Fig. 104.

Wir unterscheiden vier Fälle, je nach der Lage von M.

1. Der Punkt M gehöre einer der Parallelen a' oder a'', z. B. a', an.

Fällt man von M die Senkrechte MB auf b, so ist klar, daß sie sich nicht auch als senkrecht auf MA' ergeben wird. In der Tat, wenn MA' zu MB senkrecht wäre, so würde die Gerade $a' \equiv MA'$ zu b gegen die Voraussetzung in dem einen und in dem andern Sinne parallel sein.

Nachdem dies festgestellt ist, konstruieren wir durch M die symmetrische Gerade zu MA' in bezug auf MB. Diese Gerade wird die zweite durch M gehende Parallele zu b sein.

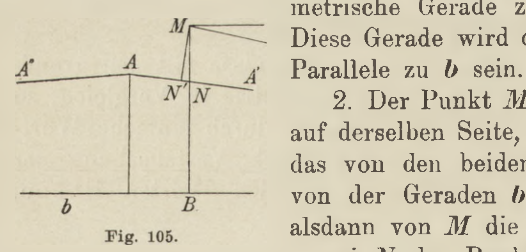


Fig. 105.

2. Der Punkt M liege mit A in bezug auf b auf derselben Seite, aber außerhalb des Gebiets, das von den beiden Strahlen AA', AA'' und von der Geraden b begrenzt wird. Man fälle alsdann von M die Senkrechte MB auf b, und es sei N der Punkt, in dem diese einen der beiden Strahlen AA', AA'', z. B. den ersten, trifft. Die Gerade MN ist nicht senkrecht auf AA', so daß man von M die Senkrechte MN'

auf AA' fällen kann. Da MN und MN' zwei verschiedene Geraden sind, so werden dies auch die beiden Senkrechten zu ihnen sein, die durch M gehen. Aber diese letzten beiden treffen b nicht; also wird es durch M zwei verschiedene Parallelen zu b geben.

3. Der Punkt M gehöre dem von der Geraden b und den Strahlen AA', AA'' begrenzten Gebiet an. Man fälle von M die Senkrechte auf b; es sei B ihr Fußpunkt und N der Punkt, in dem sie notwendigerweise einen der beiden Strahlen AA', AA'' trifft.

Wenn es durch M nur eine Parallele zu b gäbe, so würde sie zu MB senkrecht sein. Alsdann könnte man über MB hinaus eine Strecke $MM_1 = MB$ festlegen und durch M_1 die Senkrechte auf MM_1 ziehen. Diese Gerade ergibt sich nach den Prinzipien der Kongruenz und nach dem in § 8 bewiesenen Satze als zu b parallel; deshalb würde es auch durch M_1 nur eine einzige Parallele zu b geben.

Fig. 106.

In analoger Weise kann man auf NB einen Punkt M_2 derart bestimmen, daß M_1M_2 gleich MB ist, und feststellen, daß es durch M_2 nur eine einzige Parallele zu b gibt.

Setzt man das Verfahren fort, so würde man zu einem Punkte M_n außerhalb der Strecke BM (Postulat von Archimedes) gelangen, für den herauskommen würde, daß es durch ihn eine einzige Parallele zu b gibt. Aber das ist unmöglich, da es nach dem, was wir oben nachgewiesen haben, durch die Punkte, die außerhalb des von b und den beiden Strahlen AA', AA'' begrenzten Gebiets liegen, zwei Parallelen zu b gibt. Man schließt danach, daß es auch durch M zwei Parallelen geben wird.

4. Endlich falle der Punkt M in bezug auf b auf die entgegengesetzte Seite von A. Es genügt dann, die Prinzipien über die Kongruenz anzuwenden, um auch in diesem letzten Falle zu schließen, daß es durch M zwei Parallelen zu b gibt.

Außerdem führen uns dieselben Prinzipien der Kongruenz dazu, folgendes zu schließen:

Wenn es durch einen Punkt der Ebene zu einer gegebenen Geraden zwei Parallelen gibt, so gibt es durch jeden Punkt der Ebene zu einer beliebigen Geraden zwei Parallelen.

Dieser Satz überträgt sich naturgemäß auf den ganzen Raum.

§ 24. Die uneigentlichen Punkte im hyperbolischen Raume. Da durch jeden Punkt des Raumes zu einer Geraden

$a \equiv AA'$ zwei Parallelen gehen, so gibt es zwei verschiedene uneigentliche Bündel, denen die Gerade a angehört. Um eins derselben festzulegen, wird es genügen, gleichzeitig mit a den Sinn des Parallelismus anzugeben. Infolgedessen werden wir jeder Geraden des Raumes zwei voneinander verschiedene uneigentliche Punkte zuschreiben müssen.

Die Gesamtheit aller uneigentlichen Punkte macht das Gebilde aus, das man das Absolute des hyperbolischen Raumes nennt.

§ 25. Geraden, die sich nicht schneiden. Zwei Geraden derselben Ebene, die nicht parallel sind und auch keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man nicht schneidende. Es gelten dann die folgenden Sätze:

1. Zwei Geraden, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind nicht schneidende.

2. Zwei Geraden, die mit einer ihnen gemeinsamen Transversale gleiche innere Wechselwinkel bilden, usw., sind nicht schneidende.

Den ersten dieser beiden Sätze beweist man leicht indirekt, den zweiten führt man auf den ersten zurück, indem man von der Mitte der zwischen beiden liegenden Strecke der Transversale auf eine der Geraden die Senkrechte fällt und beachtet, daß diese Gerade auch auf der anderen senkrecht ist.

§ 26. Eigenschaften der Dreiseite. Zu den in § 10 aufgestellten Sätzen über Dreiseite können wir die weiteren hinzufügen, die folgen:

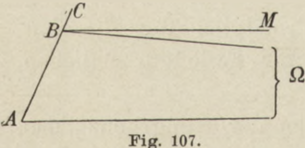


Fig. 107.

1. Ein Außenwinkel eines Dreiseits ist größer als der gegenüberliegende Innenwinkel.

In der Tat sei $CB\Omega$ ein Außenwinkel zum Dreiseit $AB\Omega$. Durch B ziehe man auf derselben Seite von Ω für AB die Gerade BM so, daß

$$\widehat{CBM} = \widehat{BA\Omega}$$

ist.

Die beiden Geraden $A\Omega$ und BM sind nicht schneidende (§ 25, 2), also wird BM notwendigerweise in den Winkel $CB\Omega$ fallen. Folglich ist

$$\widehat{AB\Omega} = \widehat{CBM} < \widehat{CB\Omega}. \text{ q. e. d.}$$

2. Zwei Dreiseite $AB\Omega$ und $A_1B_1\Omega_1$, in denen die Winkel A und B den Winkeln A_1 und B_1 bezüglich gleich sind, sind gleich.

In der Tat, wenn nicht $AB = A_1B_1$ wäre, so würde z. B. $AB > A_1B_1$ sein. Dann würde man auf AB einen Punkt C so bestimmen können, daß sich $AB = A_1B_1$ ergeben würde. Verbindet man alsdann C mit Ω, so würde das Dreiseit $AC\Omega$ dem Dreiseit $A_1B_1\Omega_1$ gleich sein (vgl. § 10).

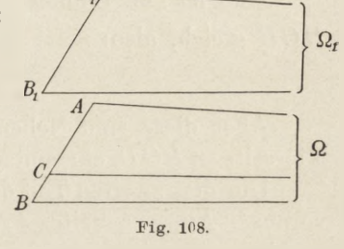


Fig. 108.

Hieraus würde die Gleichung folgen:

$$\widehat{AC\Omega} = \widehat{A_1B_1\Omega_1}.$$

Aber nach Voraussetzung haben wir:

$$\widehat{AB\Omega} = \widehat{A_1B_1\Omega_1},$$

daraus

$$\widehat{AC\Omega} = \widehat{AB\Omega}.$$

Diese letzte Gleichung sagt aus, daß in dem Dreiseit $CB\Omega$ ein Innenwinkel gleich dem gegenüberliegenden Außenwinkel ist, was dem vorhergehenden Satze widerspricht. Also ist die Annahme: $AB > A_1B_1$ hinfällig, usw.

§ 27. Vierseite und ihre Eigenschaften. Wenn in einem Vierseit $ABCD$, das in (aufeinanderfolgenden Ecken) A und B rechtwinklig ist, die Seiten AD und BC gleich sind, so sind auch die Winkel in C und D gleich und spitze. Wenn ferner AD und BC ungleich sind, so liegt an der kleineren Seite der größere Winkel.

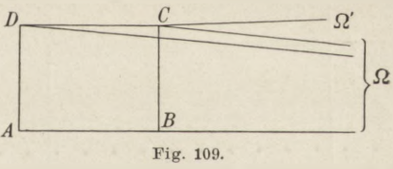


Fig. 109.

Es sei $ABCD$ das Vierseit mit den aufeinanderfolgenden rechten Winkeln $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ und mit den gleichen Seiten AD und BC. Vor allem ist klar, daß das Vierseit für die Achse (Mittelsenkrechte) der Strecke AB symmetrisch ist; hieraus folgt die Gleichheit der beiden Winkel in D und C. Um weiter nachzuweisen, daß sie spitze sind, bezeichne man mit Ω den Punkt im Unendlichen von AB auf der Seite, die zu A für B entgegengesetzt ist, und mit Ω' den Punkt im Unendlichen von DC auf der Seite, die zu D für C entgegengesetzt ist.

Man verbindet D und C mit Ω. Die Dreiseite $AD\Omega$ und $BC\Omega$ sind gleich, also:

$$\widehat{AD\Omega} = \widehat{BC\Omega}.$$

Außerdem ist der Winkel $\widehat{\Omega' C \Omega}$ Außenwinkel des Dreiseits $DC\Omega$ und deshalb:

$$\widehat{CD\Omega} < \widehat{\Omega' C \Omega}.$$

Addiert man Glied für Glied die vorhergehenden Beziehungen, so erhält man:

$$\widehat{ADC} < \widehat{BC\Omega'}.$$

Nun ist der Winkel $\widehat{ADC}$ wie wir oben bemerkten, dem Winkel $\widehat{DCB}$ gleich, also:

$$\widehat{DCB} < \widehat{BC\Omega'}.$$

Aber diese sind Nebenwinkel; daher ist der innere Winkel C des Vierseits $ABCD$ ein spitzer, wie man beweisen wollte.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, setzen wir $AD > BC$ voraus. Auf der Seite AD nehme man die Strecke $AE = BC$ und verbinde E mit C. Aus der Untersuchung der Figur ergeben sich ohne weiteres die folgenden Beziehungen:

$$\widehat{CDA} < \widehat{CEA}; \quad \widehat{CEA} = \widehat{ECB}; \quad \widehat{ECB} < \widehat{DCB},$$

also

$$\widehat{CDA} < \widehat{DCB};$$

d. h. der Winkel $\widehat{ADC}$, der an der größeren Seite AD liegt, ist kleiner als der Winkel $\widehat{DCB}$, der an der kleineren Seite liegt.

Der Satz kann umgekehrt werden, wie man indirekt beweist.

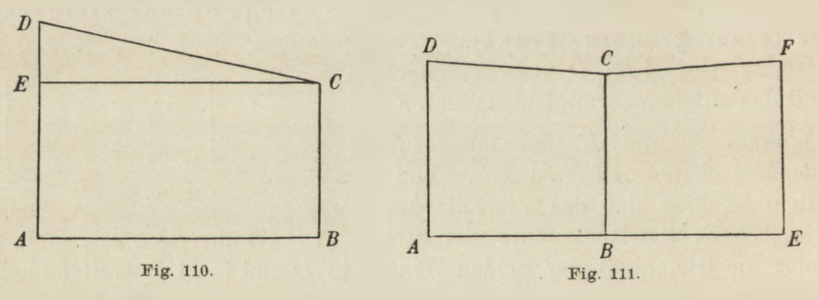


Fig. 110. Fig. 111.

Eine leichte Folgerung aus dem, was vorangeht, ist der Zusatz:

Der vierte Winkel eines dreifach rechtwinkligen Vierseits ist ein spitzer Winkel.

Es sei das Vierseit $ABCD$ in A, B und C rechtwinklig; man konstruiere zu dem gegebenen Vierseit das zu ihm für die Gerade BC symmetrische Vierseit $BCEF$.

Die Figur $AEFD$ ist ihrerseits ein in A und E rechtwinkliges Vierseit, also sind die Winkel in D und F spitze. Dies beweist den ausgesprochenen Satz.

§ 28. Summen der Winkel eines Dreiecks und eines konvexen Vielecks. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist kleiner als zwei rechte Winkel.

Da man jedes Dreieck durch die Senkrechte vom Scheitel des größten Winkels aus nach der gegenüberliegenden Seite in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen kann, so wird es genügen, den Satz für rechtwinklige Dreiecke zu beweisen.

Es sei ABC ein in A rechtwinkliges Dreieck. Man ziehe durch C auf der zu A in bezug auf die Hypotenuse entgegengesetzten Seite die Gerade CD in der Weise, daß der Winkel $\widehat{DCB}$ dem Winkel $\widehat{CBA}$ gleich wird. Dann fälle man von dem Mittelpunkte O der Strecke CB die Senkrechte auf AB. Es seien P und Q die Punkte, in denen die Senkrechte beziehungsweise AB und CD trifft. Die beiden Dreiecke OPB und OCQ sind gleich, weil eine Seite und die beiden anliegenden Winkel des einen einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln des anderen bezüglich gleich sind. Es wird deshalb der Winkel $\widehat{CQO}$ ein rechter sein, also das Viereck $APQC$ ein dreifach rechtwinkliges. Daraus folgt, daß der Winkel $\widehat{ACQ} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$ ein spitzer ist, und demgemäß, daß in dem rechtwinkligen Dreieck ABC die Summe der Winkel kleiner als zwei rechte Winkel ist.

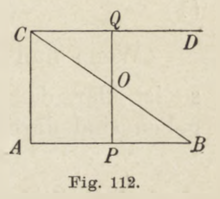


Fig. 112.

Wir betrachten nun ein beliebiges konvexes Vieleck von n Seiten und verbinden eine seiner Ecken mit den anderen $n-3$ nicht anliegenden; das Vieleck wird so in $n-2$ Dreiecke zerlegt, in deren jedem die Summe der Winkel kleiner als zwei Rechte ist. Aber die Summe der Winkel des Vielecks ist der Summe aller Winkel der Dreiecke gleich, also:

Die Summe der Winkel eines beliebigen konvexen Vielecks ist kleiner als $2(n-2)$ rechte Winkel.

§ 29. Defekt und Inhalt eines Vielecks. Die Differenz δ zwischen $2(n-2)$ rechten Winkeln und der Summe $\widehat{S}$ der Winkel eines Vielecks nennt man Defekt des Vielecks.

Es wird also sein:

$$\delta = 2(n-2)R - \widehat{S},$$

und insbesondere für das Dreieck

$$\delta = 2R - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}.$$

In bezug auf den Defekt gilt der Satz:

Der Defekt eines konvexen Vielecks P, das die Summe zweier anderen ebenfalls konvexen Vielecke P' und P'' ist, ist gleich der Summe der Defekte der beiden Vielecke.

Es sei AB die den beiden Vielecken gemeinsame Seite, n' die Zahl der Seiten von P', n'' die Zahl der Seiten von P''. Alsdann werden wir haben

Fig. 113.

$$\delta' = 2(n'-2)R - \widehat{S}',$$
$$\delta'' = 2(n''-2)R - \widehat{S}''.$$

Addiert man Glied für Glied, so erhält man:

(1) $$\delta' + \delta'' = 2(n' + n'' - 4)R - \widehat{S}' - \widehat{S}''.$$

Wenn nun A und B auch Ecken des Vielecks $P = P' + P''$ sind, so ist klar, daß die Summe $\widehat{S}$ und die Zahl n der Seiten von P gegeben sind durch

$$\widehat{S}' + \widehat{S}'' \text{ und } n' + n'' - 2,$$

also gibt (1):

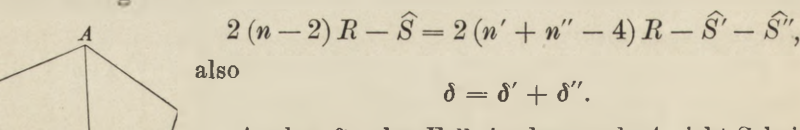
$$\delta' + \delta'' = 2(n-2)R - \widehat{S}.$$

Diese Gleichung sagt gerade, daß $\delta' + \delta''$ der Defekt von P ist.

Wenn ferner die Ecke B der beiden Polygone nicht eine Ecke von P sein sollte, alsdann ist:

$$\widehat{S} = \widehat{S}' + S'' - 2R,$$
$$n = n' + n'' - 3.$$

Hieraus ergibt sich



$$2(n-2)R - \widehat{S} = 2(n' + n'' - 4)R - \widehat{S}' - \widehat{S}'',$$

also

$$\delta = \delta' + \delta''.$$

Fig. 114.

Analog für den Fall, in dem auch A nicht Scheitel von P sein sollte.

Der Inhalt eines Vielecks ist nach der gewöhnlichen Anschauung eine Größe, die den Vielecken in der Weise zugeordnet ist, daß der Inhalt der Summe zweier oder mehrerer Vielecke der Summe ihrer Inhalte gleich ist.

Nun besitzt in der hyperbolischen Geometrie der Defekt eines Vielecks gerade diese eben ausgesprochene den Inhalten innewohnende Eigenschaft; wir können demgemäß die Defekte als Inhalte der Vielecke annehmen.

§ 30. Gemeinsame Senkrechte für zwei sich nicht schneidende Geraden. Zwei Geraden, die sich nicht schneiden und auch nicht parallel sind, lassen eine und nur eine gemeinsame Senkrechte zu.

Es seien a und b zwei sich nicht schneidende Geraden, A und A_1 zwei Punkte auf a, B und B_1 die Fußpunkte der von jenen Punkten auf b gefällten Senkrechten. Wenn $AB = A_1B_1$ sein sollte, so würde die Senkrechte auf b in dem Mittelpunkte von BB_1 die gemeinsame Senkrechte für die beiden gegebenen Geraden sein. Andernfalls wird eine der Strecken AB und A_1B_1 größer als die andere sein. Wir setzen $A_1B_1 > AB$ voraus. Man bezeichne mit Ω den uneigentlichen Punkt von AA_1 auf der Seite, die zu A_1 für A entgegengesetzt ist. Auf B_1A_1 nehme man die Strecke $B_1A' = BA$ und ziehe durch A' nach der Seite von Ω den Strahl $A'\Omega'$, der mit $A'B_1$ einen zu $\widehat{BA\Omega}$ gleichen Winkel bildet. Dann verbinde man die uneigentlichen Punkte Ω und Ω' beziehungsweise mit B und B_1. Die beiden Dreiseite $AB\Omega$ und $A'B_1\Omega'$, welche die Seiten AB und $A'B_1$ und die Winkel in A und A' gleich haben, sind gleich; also wird sein:

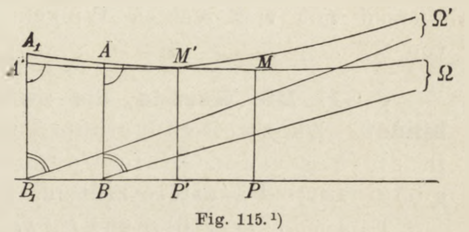


Fig. 115.[1])

$$A\widehat{B}\Omega = A_1\widehat{B_1}\Omega'.$$

Alsdann werden die beiden Geraden $B\Omega$, $B_1\Omega'$, die mit BB_1 gleiche korrespondierende Winkel bilden, weder parallel sein noch sich schneiden. Infolgedessen wird $A'\Omega'$ der Geraden $B\Omega$ nicht parallel sein und sie auch nicht schneiden. Nachdem dies festgestellt, ist leicht zu beweisen, daß $A'\Omega'$ und $A\Omega$ sich schneiden. In der Tat wird die Gerade $A'\Omega'$, gesetzt daß sie die Seite A_1A des Vierecks A_1B_1BA nicht schnitte, in welchem Falle die Behauptung bewiesen wäre, die Seite AB des Dreiseits $AB\Omega$ schneiden, und da sie nicht durch die Ecke Ω geht und auch die Seite $B\Omega$ nicht trifft, notwendigerweise auch die dritte Seite, also $A\Omega$ schneiden.

1) Der Bequemlichkeit der Zeichnung wegen sind in dieser und in anderen Figuren, die folgen, einige Geraden etwas deformiert.

Nachdem dies festgestellt ist, bezeichnen wir mit M' den gemeinsamen Punkt für $A\Omega$ und $A'\Omega'$ und mit P' den Fußpunkt der von M' auf b gefällten Senkrechten. Auf dem Strahl $A\Omega$ nehme man die Strecke $AM = A'M'$ an, und es sei P der Fußpunkt der von M auf b gefällten Senkrechten. Man erkennt leicht die Gleichheit der beiden Vierseite $AMPB$, $A'M'P'B_1$, also:

$$MP = M'P'.$$

Wenn man dann in dem Mittelpunkte von PP' die Senkrechte auf b errichtet, erhalten wir die gemeinsame Senkrechte zu den beiden Geraden a und b. Ich behaupte weiter, daß die den fraglichen Geraden gemeinsame Senkrechte die einzige ist.

In der Tat, wenn es noch eine zweite gäbe, so würden wir ein Vierseit mit vier rechten Winkeln haben, entgegen dem Ergebnis von § 28.

§ 31. Die Gerade, die zwei uneigentliche Punkte verbindet. Zu zwei von einem Punkte ausgehenden und nicht in einer geraden Linie liegenden Strahlen kann man eine gemeinsame Parallele ziehen.

Es seien (Fig. 116) a und b zwei von O ausgehende, nicht in einer Geraden liegende Strahlen, Ω und Ω' ihre bezüglichen uneigentlichen Punkte. Man nehme auf a und b die untereinander gleichen Strecken OA und OB; darauf ziehe man die Geraden $A\Omega'$ und $B\Omega$. Diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte C, der offenbar der Halbierungslinie o des Winkels $\Omega\widehat{O}\Omega'$ angehört.

Aus der Gleichheit der beiden Dreiseite $AO\Omega'$ und $BO\Omega$ ergibt sich die Gleichheit der Winkel $\Omega\widehat{A}\Omega'$ und $\Omega\widehat{B}\Omega'$ und der Reihe nach diejenige der vier Winkel, die man erhält, wenn man die Winkel $\Omega\widehat{A}\Omega'$ und $\Omega\widehat{B}\Omega'$ beziehungsweise durch die Geraden a' und b' halbiert.

Ich behaupte, daß a' und b' sich nicht schneiden und nicht parallel sind.

In der Tat, wenn a' und b' sich schnitten, würde ihr gemeinsamer Punkt der Geraden o (der Symmetrieachse der Figur) angehören und deshalb würde er sich als gleich weit entfernt von den vier Geraden a, b, $A\Omega'$ und $B\Omega$ ergeben. Nun ist der einzige Punkt gleichen Abstandes von den fraglichen Geraden der gemeinsame Punkt der Halbierungslinien der beiden Streifen $(a, B\Omega)$ und $(b, A\Omega')$, also ein innerer Punkt des Vierseits $AOBC$, während die Geraden a' und b' außerhalb des Vierseits liegen.

Also schneiden sich a' und b' nicht.

Um zu beweisen, daß a' und b' nicht parallel sind, bezeichne man mit A' den Schnittpunkt von a' und ΩB und ziehe AB. Das Dreieck ACB ist gleichschenklig, also ist $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$ und infolgedessen $A'\widehat{AB} > \widehat{ABA'}$. Alsdann wird in dem Dreieck $A'AB$, das in A einen größeren Winkel als in B hat, $AA' < A'B$ sein.

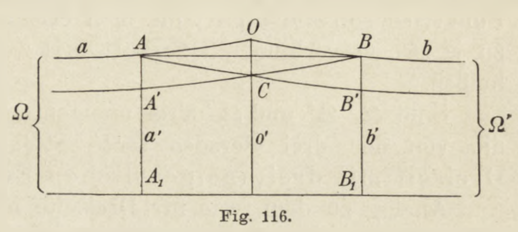


Fig. 116.

Wenn nun a' parallel b' wäre, so würde das Dreiseit $AA'\Omega$ zwei Winkel haben, die zwei Winkeln des von der Strecke $A'B$ und den Geraden a' und b' gebildeten Dreiseits gleich wären; aus diesem Grunde würde (vgl. § 10) $AA' = A'B$ sein, im Gegensatz zu der oben nachgewiesenen Ungleichheit.

Wir werden deshalb schließen, daß a' und b' eine gemeinsame Senkrechte besitzen, welche die beiden Geraden beziehungsweise in Punkten A_1 und B_1 schneiden wird. Ich behaupte, daß die Gerade $A_1 B_1$ zu den beiden Strahlen a und b parallel ist.

Um das zu beweisen, verbinde ich A_1 und B_1 mit Ω. Da (wie sich leicht aus den Eigenschaften des Vierseits ABA_1B_1 ergibt) $AA_1 = BB_1$ und $\Omega\widehat{AA_1} = \Omega\widehat{BB_1}$ ist, so sind die beiden Dreiseite ΩAA_1 und ΩBB_1 gleich und deshalb sind auch die korrespondierenden Winkel gleich, die ΩA_1 und ΩB_1 mit A_1B_1 bilden. Daher würde, falls ΩA_1 und ΩB_1 nicht mit A_1B_1 zusammenfielen, die Existenz eines Dreiecks $\Omega A_1 B_1$ folgen, in dem ein Außenwinkel dem gegenüberliegenden Innenwinkel gleich ist. Also geht A_1B_1 durch Ω und entsprechend auch durch Ω', q. e. d.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze ergeben sich leicht die folgenden Sätze:

Zwei uneigentliche Punkte bestimmen eine Gerade und nur eine.

Von einem uneigentlichen Punkte kann man eine und nur eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade fällen.

Fig. 117.

Der erste ist der vorhergehende Satz, nur in anderer Form ausgesprochen.

Für den zweiten verbinde man den uneigentlichen Punkt Ω mit einem beliebigen Punkte O der Gerade a vermittels des Strahls $O\Omega$; zu diesem konstruiere man, in bezug auf a den symmetrischen Strahl. Es sei Ω' der uneigentliche

Punkt des neuen konstruierten Strahls; die Gerade, die Ω mit Ω' verbindet, ist die verlangte Senkrechte.

§ 32. Dreiseite mit zwei und drei uneigentlichen Ecken.

Sind Ω und Ω' zwei uneigentliche Punkte und C ein eigentlicher Punkt, so soll die Figur, die man erhält, wenn man die drei Punkte zu je zweien verbindet, Dreiseit mit zwei uneigentlichen Ecken heißen.

Sind Ω, Ω' und Ω'' drei uneigentliche Punkte, so soll die Figur, die von den drei Geraden $\Omega\Omega'$, $\Omega'\Omega''$ und $\Omega''\Omega$ gebildet wird, Dreiseit mit drei uneigentlichen Ecken heißen.

Analog zu dem, was für Dreiseite mit einer uneigentlichen Ecke gemacht wurde (vgl. § 9), kann man die Fläche der neuen Dreiseite definieren und auf sie ohne weiteres die Lehrsätze des § 10 übertragen. Es gelten dann folgende Kriterien der Gleichheit.

Zwei Dreiseite mit zwei uneigentlichen Ecken sind gleich, wenn sie die Winkel in den eigentlichen Ecken gleich haben.

Dieser Satz wird offensichtlich klar, wenn man die beiden Dreiseite vermittels der Senkrechten von den eigentlichen Ecken aus nach den gegenüberliegenden Seiten zerlegt.

Zwei Dreiseite mit drei uneigentlichen Ecken sind gleich.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, genügt es, darauf hinzuweisen, daß ein Dreiseit mit drei uneigentlichen Ecken in zwei rechtwinklige Dreiseite mit einer eigentlichen und zwei uneigentlichen Ecken zerlegt werden kann.

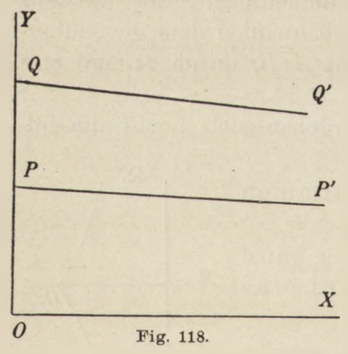


Fig. 118.

§ 33. Eigenschaften des Winkels des Parallelismus.

Es seien p und q zwei beliebige Strecken und $\widehat{YOX}$ ein rechter Winkel. Auf OY legen wir zwei Strecken OP und OQ beziehungsweise gleich p und q fest; dann ziehen wir von den Punkten P und Q aus die Parallelen PP' und QQ' zum Schenkel OX. Wenn wir mit Lobatschefskij das Symbol $\pi(p)$ benutzen, um den dem Abstande p entsprechenden Winkel des Parallelismus (vgl. § 4) zu bezeichnen, so werden wir haben:

$$\pi(p) = \widehat{OPP'},$$

$$\pi(q) = \widehat{OQQ'}.$$

Nun ist, wenn wir uns die Lehrsätze über Dreiseite (§ 10) vergegenwärtigen, klar, daß die folgenden Sätze gelten:

$$p = q \cdot > \cdot \pi(p) = \pi(q),$$
$$p > q \cdot > \cdot \pi(p) < \pi(q),$$
$$p < q \cdot > \cdot \pi(p) > \pi(q).$$

Der Winkel des Parallelismus ist also eine abnehmende Funktion von p. Insbesondere ist

$$p = 0 \cdot > \cdot \pi(p) = 1R.$$

Umgekehrt kann man p als Funktion des Winkels $\pi(p)$ ansehen. In der Tat, wenn der spitze Winkel $O\widehat{P}P'$ gegeben ist, und wir aus dem uneigentlichen Punkte von PP' die Senkrechte XO auf OP (vgl. § 31) fällen, dann wird die Strecke OP bestimmt, die dem Winkel $O\widehat{P}P'$ des Parallelismus entspricht.

Da mit dem Wachstum von p der Winkel des Parallelismus abnimmt und da jedem beliebig kleinen Winkel immer seine Strecke p entspricht, so werden wir schreiben können:

$$\pi(\infty) = 0.$$

§ 34. Allgemeine Eigenschaften der Grenzkreise. Drei Punkte ein und desselben Grenzkreises liegen nicht in gerader Linie.

Es seien A, B und C die drei Punkte des Grenzkreises l mit dem Mittelpunkte Ω. Es gelten alsdann die folgenden Gleichungen:

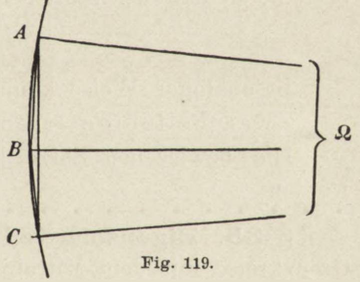


Fig. 119.

$$\Omega\widehat{A}B = \Omega\widehat{B}A,$$
$$\Omega\widehat{A}C = \Omega\widehat{C}A,$$
$$\Omega\widehat{B}C = \Omega\widehat{C}B.$$

Wenn die drei Punkte A, B und C in gerader Linie lägen, so würde sich ergeben:

$$\Omega\widehat{A}B = \Omega\widehat{B}C,$$

d. h. die Gleichheit zwischen einem inneren und einem äußeren Winkel eines Dreiseits, entgegen dem in § 10 festgestellten Satze.

In ein und demselben Grenzkreise oder in zwei beliebigen Grenzkreisen entsprechen gleichen Sehnen gleiche Bogen.

Wir bemerken, daß es für den Nachweis der Gleichheit zweier Grenzkreisbogen zweckmäßig sein wird, zu zeigen, daß es möglich ist, zwischen den Punkten eine derartige gegenseitige eindeutige Korrespondenz herzustellen, daß die Strecke, die zwei beliebige Punkte des ersten verbindet, der Strecke gleich ist, welche die entsprechenden Punkte des zweiten verbindet.

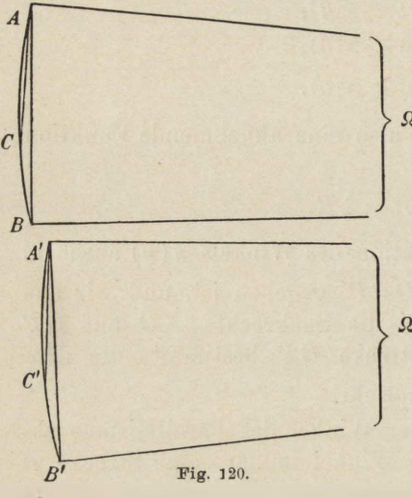


Fig. 120.

Es seien $\widehat{AB}$ und $\widehat{A'B'}$ zwei Grenzkreisbogen mit gleichen Sehnen AB und $A'B'$. Die fragliche Korrespondenz kann dann in folgender Weise hergestellt werden: Dem Punkte C des ersten ordne man so den Punkt C' des zweiten zu, daß

$$\Omega\widehat{AC} = \Omega'\widehat{A'C'}$$

ist.

Es ist dann leicht zu beweisen, daß, wenn C und D zwei Punkte von $\widehat{AB}$, C' und D' die entsprechenden Punkte von $\widehat{A'B'}$ sind, die Streckengleichheit

$$CD = C'D'$$

besteht, so daß wir schließen können:

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}.$$

In analoger Weise kann man den Satz beweisen:

Zwei beliebige Grenzkreise sind untereinander gleich.

Die bewiesenen Sätze können auf die Grenzkugeln übertragen werden.

§ 35. Eigenschaften konzentrischer Grenzkreise. Zwei Grenzkreise mit dem Mittelpunkte Ω können vermittels des uneigentlichen Büschels gegenseitig eindeutig aufeinander bezogen werden. Zu dem Zweck wird es genügen, die beiden Punkte, die jede Gerade durch Ω auf den fraglichen Grenzkreisen bestimmt, entsprechende zu nennen.

Es ist dann folgendes klar:

Wenn A, A'; B, B'; C, C' Paare entsprechender Punkte auf zwei konzentrischen Grenzkreisen sind, so sind die Strecken AA', BB', CC', usw. untereinander gleich.

Zwei Bogen konzentrischer Grenzkreise wird man *entsprechende* nennen, wenn die Endpunkte des einen zu denen des anderen entsprechend sind.

Es gilt alsdann der folgende Lehrsatz:

Die Bogen eines Grenzkreises sind den entsprechenden Bogen eines beliebigen konzentrischen Grenzkreises proportional.

In der Tat ist klar, daß gleichen Bogen auf dem ersten Grenzkreise gleiche Bogen auf dem zweiten entsprechen, daß der Summe zweier Bogen auf dem ersten die Summe der beiden entsprechenden Bogen auf dem zweiten entspricht usw.

Es seien u und v zwei Bogen des Grenzkreises l, u' und v' die beiden entsprechenden Bogen auf dem Grenzkreise l'. Dann besteht infolge des vorangehenden Lehrsatzes die Proportion:

$$u : v = u' : v'.$$

Aus dieser können wir, wenn wir beachten, daß die vier Bogen u, v, u', v' homogene Größen sind (vgl. § 34), die weitere ableiten:

$$u : u' = v : v';$$

d. h.

Das Verhältnis zwischen zwei entsprechenden Bogen in konzentrischen Grenzkreisen ist konstant.

Um den Wert dieses Verhältnisses numerisch zu berechnen, bezeichnen wir mit x den Abstand der beiden Grenzkreise und setzen:

$$(1) \qquad u : u' = f(x).$$

Nennt man l'' einen dritten Grenzkreis, der zu den beiden vorhergehenden konzentrisch ist, y den Abstand von l' und l'', u'' den dem Bogen u' auf l' entsprechenden Bogen von l'', so wird sein:

$$(2) \qquad u' : u'' = f(y).$$

Fig. 121.

Andererseits entspricht dem Bogen u auf l der Bogen u'' auf l'' und der Abstand zwischen l und l'' ist $x + y$. Also:

$$(3) \qquad u : u'' = f(x + y).$$

Eliminiert man zwischen den drei Beziehungen (1), (2), (3) die Bogen u, u' und u'', so erhält man die Funktionalgleichung:

$$f(x + y) = f(x) f(y).$$

Die einzige stetige Funktion, die dieser Gleichung genügt, ist die Exponentialfunktion; deshalb werden wir haben:

$$f(x) = a^x,$$

oder wenn wir a unter der Form $e^{\frac{1}{k}}$ nehmen:

$$u : u' = f(x) = e^{\frac{x}{k}}.$$

Für $x = k$ ist das Verhältnis der beiden konzentrischen Grenzkreise gleich e, der Basis der natürlichen Logarithmen.

Die Zahl k, die hier auftritt, ist der Parameter der hyperbolischen Geometrie.

§ 36. Trigonometrische Formeln für das rechtwinklige Dreiseit. Es sei $AB\Gamma$ ein Dreiseit mit der uneigentlichen Ecke Γ und dem rechten Winkel in B. In der Ecke A errichten wir die Senkrechte $A\Omega$ auf der Ebene des Dreiseits und verbinden den uneigentlichen Punkt Ω mit B und mit Γ (vgl. § 31). Dann beschreiben wir die Grenzkugel mit dem Mittelpunkte Ω und dem Radius ΩA und bezeichnen mit B' und C' die Punkte, in denen sie beziehungsweise die Geraden ΩB und $\Omega\Gamma$ trifft. Die Punkte A, B', C' sind die Ecken eines Dreiecks auf der Grenzkugel; seine (Grenzkreis-)Seiten wollen wir mit a, b, c und seine Winkel mit α, β, γ bezeichnen.

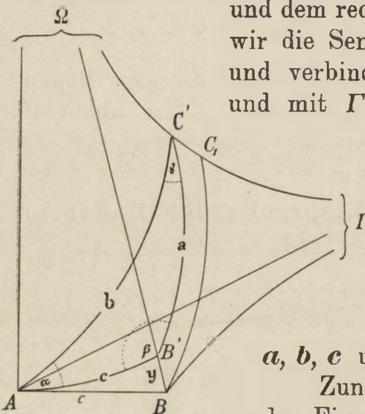


Fig. 122.

Zunächst ergeben sich aus der Untersuchung der Figur die folgenden Beziehungen:

$$\alpha = \widehat{BA\Gamma},$$
$$\beta = 1R;$$

Zieht man dann in Rechnung, daß die Grenzkugelgeometrie mit der euklidischen ebenen Geometrie identisch ist, so erhält man die weiteren (vgl. § 22):

(1)
$$\gamma = 1R - \alpha,$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{a}{b+c}.$$

Nachdem dies festgestellt ist, ziehe man in der Ebene $B\Omega\Gamma$ den Grenzkreis mit dem Mittelpunkte Ω und dem Radius ΩB und bezeichne mit C_1 den Punkt, in dem er die Gerade $\Omega\Gamma$ trifft.

Aus der Gleichheit der beiden Dreiecke $\Omega A\Gamma$ und $\Omega B\Gamma$, von denen das eine in A und das andere in B rechtwinklig ist, ergibt

sich, daß der Grenzkreisbogen BC_1 dem Grenzkreisbogen AC' gleich ist, d. h. der Seite $\boldsymbol{b}$ des Dreiecks $AB'C'$.

Wenn man andererseits mit y den Abstand der beiden Grenzkreise BC_1 und $B'C'$ bezeichnet, so wird nach dem, was im vorhergehenden Paragraphen gesagt wurde,

$$\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} = e^{\frac{y}{k}} \tag{2}$$

sein.

Betrachten wir nun die ebene Figur, die man erhält, wenn man das Dreiseit $AB\Omega$ auf die Ebene des Dreiseits $A\Omega\Gamma$ herabklappt. Die beiden Bogen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ werden sich in der Weise legen, daß sie einen einzigen Grenzkreisbogen bilden, der die Punkte B' und C' zu Endpunkten hat. Wir fällen dann von Γ die Senkrechte auf $B\Omega$, und es sei B'' ihr Fußpunkt. Die Dreiseite $\Gamma B''B$ und ΩAB, die in B'' und A rechtwinklig sind, sind gleich, weil sie den Winkel in B gemeinsam haben; also ist $BB'' = BA$. Außerdem ergibt sich aus der Gleichheit der beiden rechtwinkligen Dreiecke $\Gamma A\Omega$ und $\Gamma B''\Omega$ die Gleichheit des Grenzkreisbogens $C'A = \boldsymbol{b}$ und des Bogens $B''C''$. Wendet man auf die beiden Bogen $C'B'$ und $C''B''$ den Lehrsatz des § 35 an und setzt $AB = BB'' = c$, also $B''B' = c - y$, so erhält man:

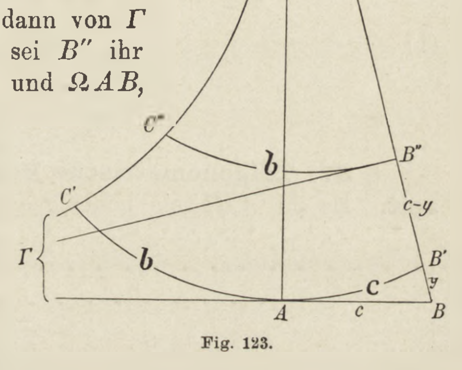


Fig. 123.

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} : \boldsymbol{b} = e^{\frac{c-y}{k}}. \tag{3}$$

Eliminiert man aus den Beziehungen (1), (2), (3) die Bogen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = e^{-\frac{c}{k}}. \tag{4}$$

Dies ist die trigonometrische Formel, welche die beiden Elemente α und c eines rechtwinkligen Dreiseits verbindet. Sie kann in eine andere Form gebracht werden, wenn man die hyperbolischen Funktionen einführt.

In der Tat, da

$$\operatorname{Ch} \frac{c}{k} = \frac{e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}}{2}$$

ist, so wird (4)

$$\operatorname{Ch} \frac{c}{k} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

In analoger Weise erhält man

$$\mathrm{Sh}\frac{c}{k} = \frac{e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Dividiert man dann Glied für Glied diese Formel und die vorhergehende, so erhält man aus ihnen eine dritte, in der $\mathrm{Th}\frac{c}{k}$ auftritt.

Fassen wir zusammen, so kann die grundlegende trigonometrische Beziehung für das rechtwinklige Dreiseit eine der folgenden drei Formen annehmen:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Sh}\frac{c}{k} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\pi(c)}, \\ \mathrm{Ch}\frac{c}{k} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\pi(c)}, \\ \mathrm{Th}\frac{c}{k} = \cos\alpha = \cos\pi(c). \end{cases}$$

§ 37. Trigonometrische Formeln für ein beliebiges Dreiseit. Es sei $AB\Gamma$ ein beliebiges Dreiseit, in dem die Winkel in A und in B mit α und mit β und die Strecke AB mit c bezeichnet werde. Es bieten sich zwei Fälle dar, je nachdem der Fußpunkt H der von Γ auf AB gefällten Senkrechten der Strecke AB (Fig. 124) oder der Verlängerung von AB (Fig. 125) angehört. In dem Folgenden beziehen wir uns besonders auf den ersten Fall.

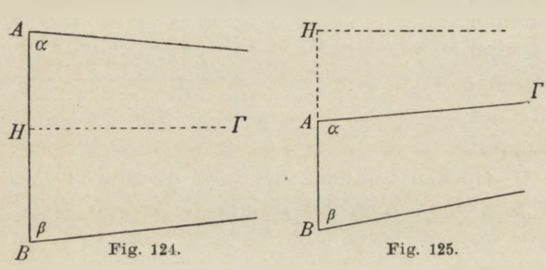


Fig. 124. Fig. 125.

Ist $c = AH + HB$, so folgert man aus den bekannten Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen

$$\mathrm{Sh}\frac{c}{k} = \mathrm{Sh}\frac{AH}{k}\,\mathrm{Ch}\frac{BH}{k} + \mathrm{Sh}\frac{BH}{k}\,\mathrm{Ch}\frac{AH}{k}.$$

Wendet man nun auf die beiden rechtwinkligen Dreiseite $AH\Gamma$ und $BH\Gamma$ die Formel (I) des vorhergehenden Paragraphen an, so können wir die hyperbolischen Funktionen von AH und von BH durch die Kreisfunktionen von α und β ausdrücken und erhalten so:

$$\mathrm{Sh}\frac{c}{k} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

In analoger Weise können wir zwei Formeln herleiten, in denen als erstes Glied $\mathrm{Ch}\frac{c}{k}$ und $\mathrm{Th}\frac{c}{k}$ auftreten. Wir werden so die folgende Gruppe von Formeln erhalten:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \mathrm{Sh}\,\dfrac{c}{k} = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}, \\ \mathrm{Ch}\,\dfrac{c}{k} = \dfrac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}, \\ \mathrm{Th}\,\dfrac{c}{k} = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}. \end{cases}$$

§ 38. Trigonometrische Formeln für das rechtwinklige Dreieck. Es sei nun ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit drei eigentlichen Ecken, C der Scheitel des rechten Winkels, Ω und Ω' die uneigentlichen Punkte der Geraden CB. Wir setzen voraus, daß B zwischen C und Ω liegt.

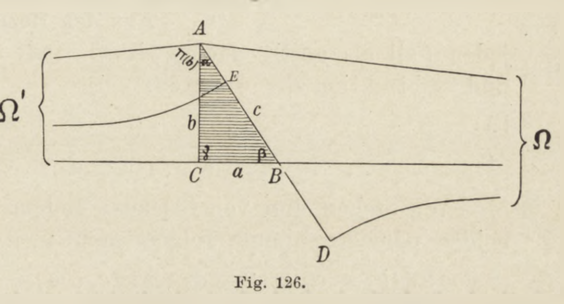


Fig. 126.

Man verbinde alsdann A mit Ω und ziehe von Ω die Senkrechte ΩD auf die Gerade AB. Wir bezeichnen mit D den Fußpunkt der Senkrechten und mit d die Strecke BD.

Aus der Figur ergeben sich, wenn man von der Bemerkung Lobatschefskijs für die Bezeichnung des Winkels des Parallelismus (vgl. § 33) Gebrauch macht, die folgenden Beziehungen:

$$\pi(b) = C\widehat{A}\Omega,$$

$$\pi(c + d) = D\widehat{A}\Omega,$$

und aus diesen die weitere

$$(1) \qquad \pi(b) = \alpha + \pi(c + d).$$

Man verbinde A mit Ω', fälle von Ω' die Senkrechte auf AB und bezeichne mit E ihren Fußpunkt.

Aus der Gleichheit der beiden Dreiseite $BD\Omega$ und $BE\Omega'$ ergibt sich:

$$EB = BD = d.$$

Da andererseits

$$\pi(b) = \Omega'\widehat{A}C, \quad \Omega'\widehat{A}E = \pi(c - d)$$

ist, so erhält man die zweite Beziehung

$$(2) \qquad \pi(b) = \pi(c-d) - \alpha,$$

die auch in dem Falle besteht, in dem E mit A zusammenfällt.

Wenn ferner E statt auf die Strecke AB auf die Verlängerung von AB fiele (s. Fig. 127), so hätte man

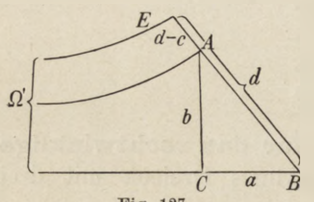


Fig. 127.

$$(2') \qquad \pi(b) = 2R - \alpha - \pi(d-c).$$

Wenn wir nun durch Definition

$$\pi(-p) = 2R - \pi(p)$$

setzen, so kann man die Gleichung (2') auch unter der Form (2) schreiben.

Aus den Beziehungen (1) und (2), die für jeden Fall als gültig nachgewiesen sind, folgert man durch Addition und Subtraktion die weiteren:

$$(3) \qquad 2\pi(b) = \pi(c-d) + \pi(c+d),$$

$$(4) \qquad 2\alpha = \pi(c-d) - \pi(c+d).$$

Wir gehen nun von (3) aus. Indem man die Kosinus von ihren beiden Gliedern nimmt, folgert man:

$$\cos 2\pi(b) = \cos\pi(c-d)\cos\pi(c+d) - \sin\pi(c-d)\sin\pi(c+d),$$

oder auch

$$2\sin^2\pi(b) = 1 - \cos\pi(c-d)\cos\pi(c+d) + \sin\pi(c-d)\sin\pi(c+d).$$

Diese letzte kann leicht mit Hilfe von (I) umgeformt werden in:

$$\frac{2}{\mathrm{Ch}^2\frac{b}{k}} = \frac{\mathrm{Ch}\frac{c-d}{k}\,\mathrm{Ch}\frac{c+d}{k} - \mathrm{Sh}\frac{c-d}{k}\,\mathrm{Sh}\frac{c+d}{k} + 1}{\mathrm{Ch}\frac{c-d}{k}\,\mathrm{Ch}\frac{c+d}{k}}.$$

Wenn man entwickelt und vereinfacht, so erhält man:

$$\frac{1}{\mathrm{Ch}^2\frac{b}{k}} = \frac{\mathrm{Ch}^2\frac{d}{k}}{\mathrm{Ch}^2\frac{c}{k}\,\mathrm{Ch}^2\frac{d}{k} - \mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}\,\mathrm{Sh}^2\frac{d}{k}},$$

aus dieser:

$$\mathrm{Ch}^2\frac{b}{k} = \mathrm{Ch}^2\frac{c}{k} - \mathrm{Sh}^2\frac{c}{k}\,\mathrm{Th}^2\frac{d}{k}.$$

Gehen wir nun zur Figur zurück, so ist klar, daß $\pi(d) = \beta$ ist; deshalb wird man infolge von (I) haben:

$$\mathrm{Th}\frac{d}{k} = \cos\pi(d) = \cos\beta.$$

Dann kann die vorhergehende Beziehung geschrieben werden:

$$\mathrm{Sh}^2 \frac{b}{k} = \mathrm{Sh}^2 \frac{c}{k} \cdot \sin^2 \beta.$$

Zieht man die Wurzel und beachtet, daß die drei Funktionen $\mathrm{Sh}\frac{b}{k}$, $\mathrm{Sh}\frac{c}{k}$ und $\sin\beta$ positiv sind, so erhält man schließlich:

$$\mathrm{Sh} \frac{b}{k} = \mathrm{Sh} \frac{c}{k} \cdot \sin \beta.$$

Dies ist eine der grundlegenden Formeln für das rechtwinklige Dreieck. Eine zweite von dieser unabhängige Formel ergibt sich durch Vertauschung von b und β mit a und α.

Um eine dritte zu erhalten, die ihrerseits von den beiden so abgeleiteten unabhängig ist, gehen wir von (4) aus, indem wir von beiden Gliedern die Kosinus nehmen. Man erhält so die Beziehung:

$$\cos 2\alpha = \cos \pi (c - d) \cos \pi (c + d) + \sin \pi (c - d) \sin \pi (c + d).$$

Formen wir diese Beziehung um, wie man das vorher mit der anderen analogen machte, so ergibt sich:

$$\mathrm{Ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

Für das rechtwinklige Dreieck werden also die folgenden drei Formeln gelten:

$$(\mathrm{III_a}) \qquad \begin{cases} \mathrm{Sh}\frac{a}{k} = \mathrm{Sh}\frac{c}{k} \cdot \sin\alpha, \\ \mathrm{Sh}\frac{b}{k} = \mathrm{Sh}\frac{c}{k} \cdot \sin\beta, \\ \mathrm{Ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta. \end{cases}$$

Kombiniert man diese Formeln in geeigneter Weise, so kann man aus ihnen weitere erhalten.

Wir bemerken aber, daß die neuen Beziehungen schneller vermittels der folgenden Betrachtungen abgeleitet werden können.

Es sei K der Radius einer euklidischen Kugel und ABC ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, das ihr angehört. Für das Dreieck ABC gelten die Formeln:

$$(\mathrm{III'_a}) \qquad \begin{cases} \sin\frac{a}{K} = \sin\frac{c}{K} \cdot \sin\alpha, \\ \sin\frac{b}{K} = \sin\frac{c}{K} \cdot \sin\beta, \\ \cos\frac{c}{K} = \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}$$

Erinnern wir uns nun, daß

$$\sin ix = i\mathrm{Sh}\,x, \qquad \cos ix = \mathrm{Ch}\,x, \qquad \mathrm{tg}\,ix = i\mathrm{Th}\,x$$

ist, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, so ist klar, daß die Vertauschung von K mit ik die letzten Formeln in die Formeln ($\mathrm{III_a}$) verwandelt. Und da man alle Formeln für rechtwinklige sphärische Dreiecke (aus $\mathrm{III_a'}$) durch Eliminationsprozesse erhält, so werden wir ohne weiteres von den Formeln der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke zu denen der rechtwinkligen Dreiecke in der hyperbolischen Ebene gelangen, wenn wir K in ik verwandeln und die Beziehungen zwischen den Kreisfunktionen und den hyperbolischen Funktionen benutzen.

Wir werden so die neuen Gruppen erhalten:

$$(\mathrm{III_b}) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \sin\beta \cdot \mathrm{Ch}\frac{a}{k}, \\ \cos\beta = \sin\alpha \cdot \mathrm{Ch}\frac{b}{k}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{III_c}) \qquad \begin{cases} \mathrm{Th}\frac{a}{k} = \mathrm{Th}\frac{c}{k} \cdot \cos\beta, \\ \mathrm{Th}\frac{b}{k} = \mathrm{Th}\frac{c}{k} \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

$$(\mathrm{III_d}) \qquad \mathrm{Ch}\frac{c}{k} = \mathrm{Ch}\frac{a}{k} . \mathrm{Ch}\frac{b}{k}.$$

§ 39. Formeln für die schiefwinkligen Dreiecke. Die Verfahrungsweisen, die es in der sphärischen Trigonometrie gestatten, die Formeln für schiefwinklige Dreiecke aus denen für rechtwinklige Dreiecke abzuleiten, sind auf die Ableitung der trigonometrischen Formeln in der hyperbolischen Ebene anwendbar. Einfacher noch, gemäß der am Schluß des vorhergehenden Paragraphen gemachten Bemerkung, wird es genügen, in den Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie den Radius K in ik zu verwandeln usw. Wir werden so die folgende Gruppe von grundlegenden Formeln erhalten:

$$(\mathrm{IV}) \qquad \begin{cases} \mathrm{Sh}\frac{a}{k} : \mathrm{Sh}\frac{b}{k} : \mathrm{Sh}\frac{c}{k} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \\ \mathrm{Ch}\frac{a}{k} = \mathrm{Ch}\frac{b}{k} \cdot \mathrm{Ch}\frac{c}{k} - \mathrm{Sh}\frac{b}{k} \cdot \mathrm{Sh}\frac{c}{k} \cdot \cos\alpha, \\ \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,\mathrm{Ch}\frac{a}{k}. \end{cases}$$

§ 40. Die gewöhnliche Trigonometrie als Grenzfall der hyperbolischen Trigonometrie. Wir gehen von der zweiten Formel

unter (IV) aus und setzen für die hyperbolischen Funktionen der Seiten die bezüglichen Reihenentwicklungen ein: Wir werden erhalten:

$$1+\frac{a^2}{2!\,k^2}+\frac{a^4}{4!\,k^4}+\cdots=\left(1+\frac{b^2}{2!\,k^2}+\frac{b^4}{4!\,k^4}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{c^2}{2!\,k^2}+\frac{c^4}{4!\,k^4}+\cdots\right)-$$

$$-\left(\frac{b}{k}+\frac{b^3}{3!\,k^3}+\cdots\right)\cdot\left(\frac{c}{k}+\frac{c^3}{3!\,k^3}+\cdots\right)\cos\alpha,$$

$$=\left(1+\frac{b^2}{2!\,k^2}+\frac{c^2}{2!\,k^2}+\cdots\right)-\left(\frac{bc}{k^2}+\cdots\right)\cos\alpha.$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten die Einheit und multiplizieren dann mit $2k^2$, so erhalten wir:

$$a^2+\cdots=b^2+c^2-2bc\cos\alpha+\cdots,$$

wo die nicht geschriebenen Glieder eine Potenz von k, die höher als die erste ist, zu Divisoren haben.

Daher werden wir, wenn wir für $k=\infty$ zur Grenze übergehen, erhalten:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

d. h. die grundlegende Formel der gewöhnlichen Trigonometrie.

Betrachten wir in der hyperbolischen Ebene ein Gebiet, in dem die Länge der größten Strecke im Vergleich zu k als unendlich klein angesehen werden kann, so geben die unter der Voraussetzung $k=\infty$ abgeleiteten Formeln bis auf unendlich kleine Größen 2. O. die auf jenes Gebiet bezüglichen trigonometrischen Beziehungen an.

Diese Tatsache pflegt man auszudrücken, indem man sagt:

In der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes gelten auf der hyperbolischen Ebene die Formeln der gewöhnlichen Trigonometrie.

In diesem Punkte können wir die wahre Natur des Postulats von Euklid aufdecken. Die Tatsache, daß in der physischen Ebene innerhalb der Grenzen der Erfahrung die euklidische Geometrie bestätigt wird, schließt nicht ein, daß die fragliche Ebene genau eine euklidische Ebene ist. Sie könnte auch eine hyperbolische Ebene mit einem so großen Parameter k sein, daß die Fehler, die begangen werden, wenn man ihn als unendlich groß ansieht, kleiner werden, als diejenigen, die mit den experimententellen Verfahrungsweisen des Messens verknüpft sind.

Also ist in diesem Falle die Forderung, daß es nur eine einzige Parallele gibt, mit einer Vereinfachung der Theorie gleichbedeutend, ohne daß in sie von der Erfahrung nachweisbare Änderungen hineingetragen würden.

Das fünfte Postulat von Euklid erscheint hiernach als Postulat der Vereinfachung.

§ 41. Sphärische Trigonometrie. Wir wollen diesen flüchtigen Ausflug in das Gebiet der hyperbolischen Geometrie damit beenden, daß wir die Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten.

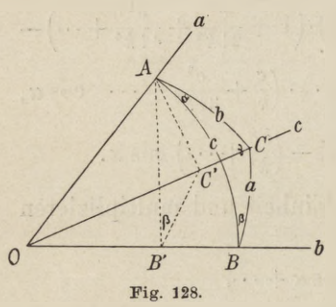


Fig. 128.

Es sei ABC ein in C rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen Katheten kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, und O der Mittelpunkt der Kugel. Um die trigonometrischen Formeln für das Dreieck ABC herzuleiten, verfahren wir, wie man es in der euklidischen Geometrie gewöhnlich zu tun pflegt.

Von A fällen wir die Senkrechte AC' auf OC, von C' die Senkrechte $C'B'$ auf OB und verbinden dann B' mit A.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken OAC', $AC'B'$, $OB'A$ ergeben sich die Beziehungen:

$$\sin b = \mathrm{Sh}\frac{AC'}{k} : \mathrm{Sh}\frac{OA}{k},$$

$$\sin \beta = \mathrm{Sh}\frac{AC'}{k} : \mathrm{Sh}\frac{AB'}{k},$$

$$\sin c = \mathrm{Sh}\frac{AB'}{k} : \mathrm{Sh}\frac{OA}{k},$$

die miteinander kombiniert geben:

$$\sin b = \sin \beta \cdot \sin c.$$

Vertauscht man b und β mit a und α, so erhält man:

$$\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c.$$

Um eine dritte Formel, die von den beiden erhaltenen unabhängig ist, abzuleiten, gehen wir von folgenden Formeln aus, die für die in der Figur sich findenden ebenen Dreiecke gültig sind.

$$\cos b = \frac{\mathrm{Ch}\frac{AC'}{k} \cdot \mathrm{Sh}\frac{OC'}{k}}{\mathrm{Sh}\frac{OA}{k}}, \quad \cos a = \frac{\mathrm{Ch}\frac{C'B'}{k} \cdot \mathrm{Sh}\frac{OB'}{k}}{\mathrm{Sh}\frac{OC'}{k}}, \quad \cos c = \frac{\mathrm{Ch}\frac{AB'}{k} \cdot \mathrm{Sh}\frac{OB'}{k}}{\mathrm{Sh}\frac{OA}{k}},$$

$$\mathrm{Ch}\frac{AB'}{k} = \mathrm{Ch}\frac{AC'}{k} \cdot \mathrm{Ch}\frac{C'B'}{k}.$$

Eliminiert man die hyperbolischen Funktionen der Strecken AC', OC' $C'B'$ usw., so erhält man:

$$\cos a \cdot \cos b = \cos c.$$

Die so erhaltenen Formeln

$$\sin a = \sin\alpha \cdot \sin c,$$
$$\sin b = \sin\beta \cdot \sin c,$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b,$$

fallen mit denen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie zusammen. Und da die ganze sphärische Trigonometrie sich aus diesen Formeln ergibt, so können wir schließen:

Die gewöhnliche sphärische Trigonometrie ist auch in der hyperbolischen Geometrie gültig.

Man bedachte, daß wir, um dies Ergebnis zu erhalten, stillschweigend die Messung der Elemente a, b, c des rechtwinkligen Dreiecks in rechten Winkeln voraussetzten.

Elliptische Geometrie.

§ 42. Grundlegende Eigenschaften der elliptischen Ebene. Der neuen Geometrie legen wir diejenigen Postulate der euklidischen Metrik zugrunde, die von der Hypothese, daß die Gerade eine offene (nicht geschlossene) Linie ist, unabhängig sind, und nehmen die grundlegende Hypothese der elliptischen Geometrie hinzu:

Zwei Geraden derselben Ebene haben einen Punkt gemeinsam.

Eine erste Folgerung, die sich aus diesen Prämissen ergibt, ist das Bestehen einer eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden und den Geraden eines Büschels.

Die Gerade erscheint so in der Anschauung als eine geschlossene Linie.

Danach bestimmen zwei ihrer Punkte nicht eine einzige Strecke, sondern vielmehr zwei. Die beiden Strecken, die in zwei angegebenen Punkten ihre Endpunkte haben, sollen anliegend heißen.

Eine andere unmittelbare Eigenschaft der elliptischen Ebene ist die, daß sie von ihrer Geraden nicht in zwei Teile zerlegt wird.

In der Tat wählt man auf der Ebene zwei beliebige Punkte A und B und eine nicht durch sie hindurchgehende Gerade r, so trifft von den beiden Strecken, die A und B zu Endpunkten haben, eine und nur eine die Gerade r; deshalb kann man, wenn man die Strecke, die r nicht schneidet, durchläuft, von A nach B übergehen, ohne r zu überschreiten.

Die elliptische Ebene ist nicht wie die euklidische und hyperbolische Ebene eine einfach zusammenhängende Fläche.

Sie muß vielmehr zweifach zusammenhängend genannt werden, weil zwei beliebige Geraden, die ihr angehören, sie immer zerstückeln.

In der Tat haben zwei Geraden r und s, die ihr angehören, einen Punkt O gemeinsam.

Wenn A und B zwei beliebige Punkte der Ebene sind, so trifft von den beiden anliegenden Strecken a und a', die durch sie bestimmt werden, eine, z. B. a, die Gerade r. Wenn die andere Strecke a' die Gerade s träfe, so würde schon festgestellt sein, daß man nicht von A zu B übergehen kann, ohne eine der beiden Geraden zu überschreiten. Wenn es weiter vorkommt, daß a beide Geraden in den Punkten R und S schneidet, so fasse man einen Punkt P auf der in a enthaltenen Strecke RS und einen Punkt Q auf a' ins Auge. Dann ist klar, daß man, um von P nach Q überzugehen, die eine oder die andere der beiden gegebenen Geraden überschreiten muß.

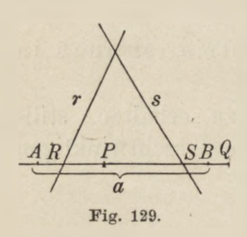


Fig. 129.

Hieraus folgt, daß die Ebene in Teile, die nicht miteinander zusammenhängen, zerstückelt wird, wenn man längs der Geraden r und s zwei Schnitte ausführt.

Eine genauere Untersuchung würde zeigen, daß solcher Teile zwei sind, deren jeder einen Winkel bildet.

Für die euklidische Anschauung muß der Winkel, der in der elliptischen Geometrie auftritt, als Summe zweier Scheitelwinkel vorgestellt werden.

Die beiden durch die Geraden r und s bestimmten Winkel nennt man einander anliegend. Wenn zwei anliegende Winkel sich als gleich herausstellen, so ist jeder ein Rechter und die Schenkel geben ein Paar senkrechter Geraden.

§ 43. Absolutes Polarsystem der elliptischen Ebene. Wir können ohne weiteres in der elliptischen Geometrie diejenigen Eigenschaften als festgestellt ansehen, die in der euklidischen Verfassung von der Unendlichkeit der Geraden und dem Parallelenpostulat unabhängig sind; z. B. die Kriterien der Gleichheit (Kongruenz) zwischen Dreiecken usw.

Gehen wir nun zur Entwicklung derjenigen Eigenschaften der elliptischen Ebene über, die in der euklidischen Ebene kein Seitenstück haben.

Alle Geraden, die auf einer Geraden senkrecht stehen, laufen in einem Punkt zusammen.

Es sei R der Schnittpunkt der Geraden, die in A und B auf der Geraden $\mathfrak{r} \equiv AB$ senkrecht stehen. Betrachten wir die beiden gleichschenkligen Dreiecke, die eine der beiden Strecken AB zur gemeinsamen Grundlinie und R zur gemeinsamen Ecke haben, so sind die beiden Dreiecke gleich (2. Kriterium der Gleichheit); deshalb ergeben sich die vier Seiten, die auf der gemeinsamen Grundlinie senkrecht stehen, untereinander als gleich. Hieraus folgt, daß der Punkt R und die Gerade $\mathfrak{r}$ die Geraden AR und BR in gleiche Teile zerlegen.

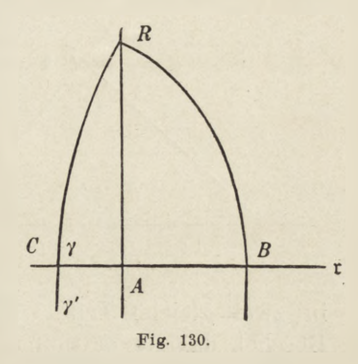


Fig. 130.

Man verbinde nun R mit einem beliebigen Punkte C von $\mathfrak{r}$. Dann erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, in denen die Seite CA und die Ecke R gemeinsam und die Seiten, welche die Punkte A und R zu Endpunkten haben, gleich sind. Alsdann sind nach dem ersten Kriterium der Gleichheit die beiden Dreiecke gleich, und infolgedessen ergeben sich die beiden Winkel γ und γ' (s. Figur), die den Scheitel in C gemeinsam haben, als gleich. Aber γ und γ' sind anliegend, also ist $\gamma = \gamma' = 1R$, folglich AC senkrecht auf $\mathfrak{r}$.

Hiermit haben wir bewiesen, daß alle Geraden, die R mit $\mathfrak{r}$ verbinden, auf $\mathfrak{r}$ senkrecht sind, oder daß alle Senkrechten auf $\mathfrak{r}$ in R zusammenlaufen.

Aus der entwickelten Schlußreihe ergibt sich auch, daß alle Strecken, die R mit den verschiedenen Punkten von $\mathfrak{r}$ verbinden, untereinander gleich sind und jede der Halbgeraden gleich ist.

Hieraus folgert man:

Die Endpunkte aller von ein und demselben Punkte ausgehenden Halbgeraden liegen in gerader Linie.

Den Punkt, in dem alle Senkrechten einer Geraden zusammenlaufen, nennt man Pol der Geraden, die Gerade ihrerseits heißt Polare des Punktes.

Es gilt alsdann der folgende Lehrsatz:

Wenn eine Gerade $\mathfrak{p}$ durch den Pol R von $\mathfrak{r}$ geht, so gehört der Pol P von $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{r}$ an.

In der Tat treffe die durch R nach $\mathfrak{p}$ gezogene Senkrechte die Gerade $\mathfrak{r}$ in einem Punkte P. Dieser Punkt ist der Pol von $\mathfrak{p}$, weil in ihm zwei Senkrechte von $\mathfrak{p}$ zusammenlaufen.

Ein einfacher Zusatz zu dem bewiesenen Satze ist der folgende:

Wenn die Gerade p ein Büschel beschreibt, so beschreibt der Pol von p eine Gerade, die die Polare des Mittelpunktes des Büschels ist.

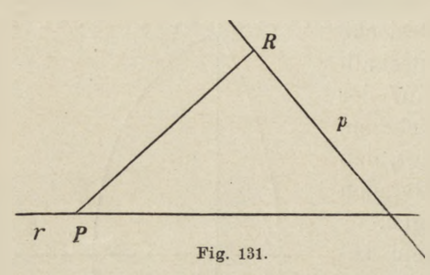


Fig. 131.

Zwei Punkte heißen konjugiert, wenn der eine auf der Polare des anderen liegt; zwei Geraden nennt man konjugiert, wenn die eine durch den Pol der anderen geht.

Alsdann ist klar:

Zwei konjugierte Punkte zerlegen die Gerade, die sie verbindet, in zwei gleiche Teile, und zwei konjugierte Geraden zerlegen das Büschel, das sie bestimmen, in zwei gleiche (rechte) Winkel.

Die oben aufgestellte Beziehung zwischen den Punkten und Geraden einer Ebene besitzt alle graphischen Eigenschaften des in der projektiven Geometrie behandelten Polarsystems. Sie wird absolutes Polarsystem der Ebene genannt.

§ 44. Zugeordnete Winkel und Strecken. Ihre Messung. Man betrachte zwei von einem Punkte A ausgehende Geraden und die beiden Punkte B, C, die sie auf der Polare von A bestimmen. Faßt man einen der beiden Winkel ins Auge, welche die beiden Geraden in A bilden, z. B. den in der Figur schraffierten, so ordne man ihm diejenige der beiden Strecken zu, welche die Endpunkte B und C hat und in das Innere des Winkels fällt, und bezeichne diese Strecke mit a. Dem Supplementwinkel (der in der Figur nicht schraffiert ist) wird nach diesem Gesetz offenbar die Strecke a', die zu a supplementar ist, zugeordnet.

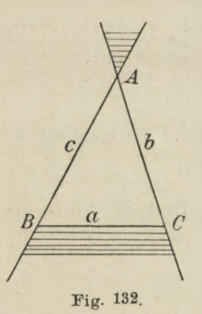


Fig. 132.

Es ist klar, daß zwei gleiche Winkel gleiche zugeordnete Strecken haben werden, daß zwei ungleiche Winkel ungleiche zugeordnete Strecken haben werden, und genauer, daß dem größeren Winkel die größere Strecke zugeordnet sein wird, daß ein Winkel, der die Summe von mehreren anderen ist, die Summe der den genannten Winkeln zugeordneten Strecken zur zugeordneten Strecke haben wird. Es folgt hieraus, daß, wenn α und β zwei Winkel, a und b die bezüglichen zugeordneten Strecken sind,

$$\alpha : \beta = a : b$$

ist, also: *Wenn man als Maßeinheit für Winkel den Winkel annimmt, der der Maßeinheit für Strecken zugeordnet ist, so werden die Winkel und die zugeordneten Strecken durch dieselbe Zahl* (die ihr Maß ausdrückt) *dargestellt.*

§ 45. Gesetz der Dualität in der elliptischen Ebene. Das absolute Polarsystem gestattet, jeder Figur der elliptischen Ebene eine andere Figur, die sogenannte *polare* oder *duale Figur*, zuzuordnen, die zu ihr in der folgenden Beziehung steht: *Jedem Punkte und jeder Geraden der gegebenen Figur entspricht beziehungsweise eine Gerade oder ein Punkt in der Polarfigur.*

Setzt man nun voraus, daß die ursprüngliche Figur eine bestimmte *graphische Eigenschaft* besitzt, welche das Angehören (die Verknüpfung) von Punkten und Geraden ausdrückt, so besitzt offenbar die Polarfigur eine andere Eigenschaft, die man zu der vorhergehenden *dual* nennen kann, und die sich aus ihr ergibt, wenn man in dem sie ausdrückenden Satze die Worte Gerade und Punkt vertauscht und diejenigen Abänderungen vornimmt, die aus dieser Vertauschung folgen.

Z. B. wenn in einer Figur mehrere Geraden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \ldots$ durch einen Punkt O gehen, so liegen in der dualen Figur die Punkte A', B', C' ..., welche bezüglich $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \ldots$ entsprechen, in einer O entsprechenden Geraden $\mathbf{o}'$.

Es gilt also in der elliptischen Geometrie das *Gesetz der Dualität der projektiven Geometrie*, das, wie bekannt, gestattet, jeder *graphischen Eigenschaft der Ebene* eine andere Eigenschaft (*duale Eigenschaft*) zuzuordnen, die aus der ersten durch Vertauschung der Worte Punkt und Gerade usw. folgt.

Wir zeigen nun, daß auf der elliptischen Ebene das Gesetz der Dualität auch für die *metrischen Eigenschaften* gilt.

Fig. 133.

Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, ist es zweckmäßig, einige Worte der Art und Weise zu widmen, wie man zu einer Figur, in der man die *Strecken* und *Winkel* in Betracht zieht, die duale erhält.

Hierzu sei ACB eine bestimmte Strecke der Geraden $\mathbf{o}$, und $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ seien die Polaren ihrer Endpunkte A, B.

Nennt man A' und B' die Punkte, in denen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die Ge-

rade o treffen, so ist klar, daß die beiden Paare A, B und A', B' sich nicht trennen.

In der Tat, wenn die Strecke ACB größer als eine Halbgerade ist, so werden die Punkte A', B' der fraglichen Strecke angehören; wenn ACB gleich der Halbgeraden ist, so wird A' mit B und B' mit A zusammenfallen; endlich wenn ACB kleiner als die Halbgerade ist, so werden die beiden Punkte A und B in die an ACB anliegende Strecke fallen.

Von den beiden Strecken, welche die Punkte A' und B' auf o bestimmen, fassen wir diejenige ins Auge, welche die Strecke ACB enthält oder diejenige, die in ACB enthalten ist. Alsdann ist klar, daß die Summe der beiden Strecken ACB und $A'C'B'$ gleich der ganzen Geraden ist.

Nachdem dies festgestellt ist, wollen wir polaren Winkel der Strecke $c \equiv ACB$ den der Strecke $c' = A'C'B'$ zugeordneten Winkel γ' nennen. Umgekehrt nennt man die Strecke c polare Strecke des Winkels γ'.

Wenn man als Einheit für das Messen der Winkel den rechten Winkel und als Einheit für das Messen der Strecken die Halbgerade festlegt, alsdann besteht zwischen der Länge c einer Strecke und der Weite γ' seines polaren Winkels die Beziehung:

$$c + \gamma' = 2.$$

Setzt man dies fest, so sind die Winkel und die Strecken, die in der Polarfigur F' einer gegebenen Figur F in Betracht kommen, die polaren Winkel und Strecken der Figur F. Dann ist klar, daß, wenn in F' einige Strecken oder Winkel gleich sind, in der polaren Figur einige Winkel und Strecken untereinander gleich sein werden; mit anderen Worten: Die Beziehung der Gleichheit bleibt bei der polaren Transformation erhalten, nur geht sie auf Winkel über, wenn sie zwischen Strecken besteht, und umgekehrt. Wenn dagegen zwei Strecken a und b von F' durch die Beziehung $a < b$ verbunden sind, so genügen die entsprechenden Winkel α' und β' in der polaren Figur der Beziehung $\alpha' > \beta'$; also: Die Ungleichheit ändert in der polaren Transformation den Sinn, wobei sie auf Winkel übergeht, wenn sie für Seiten gegeben war, und umgekehrt.

Halten wir uns die Ergebnisse, zu denen wir gelangt sind, gegenwärtig, so ist klar, daß jeder metrischen Eigenschaft der Figur F eine metrische Eigenschaft der polaren Figur F' entspricht; diese erhält man, wenn man in der auf F bezüglichen Aussage das Wort Punkt mit dem Wort Strecke, das Wort Strecke mit dem Worte Winkel, das Wort größer mit dem

Worte kleiner usw. vertauscht und diejenigen Änderungen der Worte vornimmt, die aus diesen Vertauschungen folgen.

Bemerkung. Man beachte die vollkommene Analogie zwischen der elliptischen Ebene und dem Bündel (System der Geraden und Ebenen, die durch einen Punkt gehen). Dem Polarsystem in der elliptischen Ebene entspricht im Bündel das absolute Polarsystem, das jeder Geraden die senkrechte Ebene entsprechen läßt. In diesem Polarsystem läßt man jedem Flächenwinkel einen bestimmten Winkel entsprechen; diesen erhält man, wenn man im Mittelpunkte des Bündels (zu dem die Kante des Flächenwinkels gehört) auf jeder Fläche des Flächenwinkels die Senkrechte errichtet und zwar auf der Seite, auf der sich die andere Fläche befindet. Zwischen dem Neigungswinkel α (Normalschnitt) des Flächenwinkels und dem so konstruierten Winkel α' besteht, wie man weiß, dieselbe Beziehung $\alpha + \alpha' = 2R$, die wir zwischen den entsprechenden Elementen auf der elliptischen Ebene festgestellt haben.

Schneidet man das Bündel durch eine Kugel, die ihren Mittelpunkt im Mittelpunkte des Bündels hat, so werden die ebenen Winkel des Bündels den Bogen größter Kreise auf der Kugel entsprechen, die Flächenwinkel des Bündels den Winkeln auf der Kugel, dem Polarsystem des Bündels das Polarsystem auf der Kugel.

Auf der Kugel gilt demgemäß, wie übrigens bekannt ist, ein Gesetz der Dualität, das zu dem, das, wie wir sahen, auf der elliptischen Ebene besteht, analog ist.

§ 46. Summe der Winkel eines Dreiecks und eines Vierecks. Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der einem der Schenkel des rechten Winkels gegenüberliegende Winkel ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer, je nachdem dieser Schenkel kleiner, gleich oder größer als die Halbgerade ist.

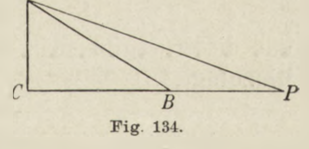


Fig. 134.

Es sei ABC ein in C rechtwinkliges Dreieck und P der Pol von AC. Je nachdem die Dreiecksseite CB kleiner, gleich oder größer als die Halbgerade ist, gehört P der Verlängerung von CB an, fällt mit B zusammen oder gehört endlich CB an.

Wenn man P mit A verbindet, so gelten die Sätze:

$$CB < CP \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} < \widehat{CAP};$$

$$CB = CP \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} = \widehat{CAP};$$

$$CB > CP \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} > \widehat{CAP}.$$

Nun ist, wenn P der Pol von AC ist, die Strecke CP gleich der Halbgeraden und $\widehat{CAP}$ ein rechter Winkel. Alsdann können die obengeschriebenen Sätze in die Form gebracht werden:

$$CB < \text{Halbgerade} \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} < 1R;$$

$$CB = \text{Halbgerade} \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} = 1R;$$

$$CB > \text{Halbgerade} \cdot \supset \cdot \widehat{CAB} > 1R. \qquad \text{q. e. d.}$$

Der Hilfssatz kann leicht umgekehrt werden.

Wir gehen nun zum Beweise des Satzes über:

Die Summe der Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ist größer als zwei rechte Winkel.

Wenn mindestens der eine der beiden Schenkel des rechten Winkels gleich oder größer als eine Halbgerade ist, so ist der diesem Schenkel gegenüberliegende Winkel ein rechter oder ein stumpfer, sodaß in diesen Fällen die Summe der Winkel des Dreiecks offenbar zwei rechte Winkel übersteigt.

Wenn ferner die beiden Katheten gleichzeitig kleiner als eine Halbgerade sind, so werden wir folgendermaßen schließen:

Fig. 135.

Von der Mitte M der Hypotenuse AB fällen wir die Senkrechte auf die Kathete AC. Der Fußpunkt N dieser Senkrechten wird der fraglichen Kathete angehören.

Dann bezeichnen wir mit P den Pol von MN und mit N' den Schnittpunkt von PB und MN. Es wird so ein Dreieck $MN'B$ bestimmt, daß in N' rechtwinklig und dem Dreieck AMN gleich ist. Wir haben also die Winkelbeziehung:

$$\widehat{MAN} = \widehat{MBN'};$$

aus dieser ergibt sich, wenn man auf beiden Seiten den Winkel $\widehat{ABC}$ hinzufügt,

$$\widehat{ABC} + \widehat{MAN} = \widehat{PBC}.$$

Aber in dem rechtwinkligen Dreieck PBC ist die Kathete $PC = PN + NC$ größer als die Halbgerade; dann haben wir nach dem oben bewiesenen Hilfssatze:

$$PBC > 1R;$$

also gibt uns die vorhergehende Winkelgleichung, mit dieser Ungleichung kombiniert,

$$\widehat{ABC} + \widehat{MAN} > 1R.$$

Nun, wenn in dem Dreieck ABC die Summe der beiden Winkel in A und B größer als ein rechter Winkel ist, folgt unmittelbar:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}>2R \qquad \text{q. e. d.}$$

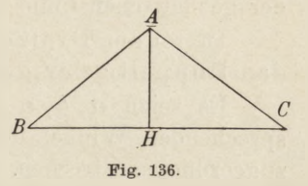


Fig. 136.

Der nunmehr bewiesene Lehrsatz überträgt sich bald auf nicht-rechtwinklige Dreiecke. In der Tat seien (Fig. 136) B und C die Scheitel zweier Winkel derselben Art, nämlich beide spitze oder beide stumpfe, und H der Fußpunkt der von der Ecke A auf die Seite BC gefällten Senkrechten. Der Punkt H gehört der Strecke BC an und in den rechtwinkligen Dreiecken ABH, ACH gelten die Beziehungen:

$$\widehat{B}+B\widehat{A}H>1R,$$
$$\widehat{C}+C\widehat{A}H>1R.$$

Addiert man Glied für Glied, so folgt

$$\widehat{C}+\widehat{B}+\widehat{A}>2R. \qquad \text{q. e. d.}$$

Durch eine Schlußweise, die der in § 28 entwickelten gleich ist, beweist man weiter den Satz: Die Summe der Winkel eines Vielecks ist größer als $2(n-2)$ rechte Winkel.

§ 47. Exzeß und Inhalt eines Vielecks. Die Differenz zwischen der Summe der Winkel eines Vielecks und $2(n-2)$ rechten Winkeln nennt man Exzeß des Vielecks. Also werden wir haben:

$$\varepsilon=\widehat{S}-2(n-2)R$$

und insbesondere für das Dreieck:

$$\varepsilon=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}-2R.$$

In bezug auf ε beweist man den Satz:

Der Exzeß eines Vielecks, das die Summe zweier oder mehrerer anderer ist, ist gleich der Summe ihrer Exzesse.

Die Begründung ist von derselben Art wie die, die in § 29 für den analogen Lehrsatz in der hyperbolischen Ebene entwickelt wurde.

Auch für den Inhalt eines Vielecks können wir wiederholen, was wir in § 29 sagten, weil auch die Exzesse Größen sind, die sich mit dem Summieren der Vielecke summieren. Wir werden demgemäß den Exzeß als den Inhalt eines Vielecks ansehen können.

§ 48. Geodätische Eigenschaft der Geraden. Um zu beweisen, daß die Gerade auch auf der elliptischen Ebene die Eigenschaft der geodätischen Linie besitzt, schicken wir den folgenden Satz voraus:

In jedem Dreieck ist die Summe der Seiten kleiner als das Doppelte der ganzen Geraden.

Es seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ die Seiten eines Dreiecks, α', β', γ' die entsprechenden Winkel des polaren Dreiecks, $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ die zu α', β', γ' zugeordneten Strecken. Bezeichnet man die Halbgerade kurz mit s, so haben wir nach dem, was in § 45 gesagt wurde:

$$a' + a = 2s,$$

$$b' + b = 2s,$$

$$c' + c = 2s.$$

Aber da $\alpha' + \beta' + \gamma' > 2R$ ist, so wird sein:

$$a' + b' + c' > 2s.$$

Addiert man dann die vorhergehenden Gleichungen und trägt dieser letzten Ungleichung Rechnung, so ergibt sich:

$$a + b + c < 4s. \qquad \text{q. e. d.}$$

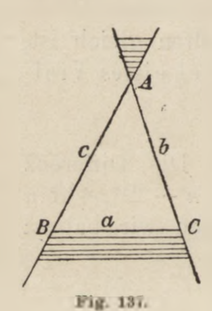


Fig. 137.

Wir gehen nun dazu über, die geodätische Eigenschaft der geraden Linie zu beweisen, d. h.

In jedem Dreieck ist eine Seite kleiner als die Summe der beiden anderen.

Es sei ABC das Dreieck. Wir verlängern $\boldsymbol{c} \equiv AB$ und $\boldsymbol{b} \equiv AC$ in der Weise, daß man ein neues Dreieck erhält, das mit dem vorhergehenden die Seite $\boldsymbol{a} \equiv BC$ gemeinsam und als weitere Seiten $2\boldsymbol{s} - \boldsymbol{c}$ und $2\boldsymbol{s} - \boldsymbol{b}$ hat. Wendet man auf dies Dreieck den vorhergehenden Lehrsatz an, so erhält man:

$$a + 2s - b + 2s - c < 4s,$$

hieraus:

$$a < b + c. \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 49. Eine Eigenschaft des Vierseits mit drei rechten Winkeln. Es sei $ABCD$ ein Vierseit mit drei rechten Winkeln, dessen Seiten AB, BC kleiner als die Halbgerade und dessen Winkel $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ rechte sind. Der vierte Winkel D wird alsdann ein stumpfer sein. Ich behaupte, daß die Ungleichungen:

$$AD < BC; \quad DC < AB$$

bestehen.

Wir beweisen die erste. Vor allem ist klar, daß nicht $AD = BC$ sein kann, weil dann $\widehat{D} = \widehat{C} = 1\,R$ sein müßte, während $\widehat{D}$ ein stumpfer Winkel ist. Wenn weiter $AD > BC$ wäre, so nehme man auf der Verlängerung von BC die Strecke $BC' = AD$ an und verbinde C' mit D. In dem Dreieck DCC' ist die Seite DC kleiner als eine Halbgerade und deshalb ist der Winkel $\widehat{C'}$ spitz. Aber da $AD = BC'$ ist, müßte $\widehat{ADC'} = \widehat{BC'D}$ sein, was unmöglich ist, da $\widehat{ADC'}$ größer als der stumpfe Winkel D des Vierseits $ABCD$ ist. Also kann nicht $AD > BC$ sein.

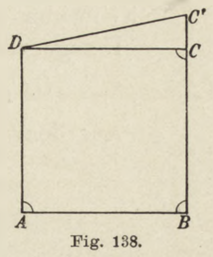


Fig. 138.

In derselben Weise zeigt man, daß DC kleiner als AB ist.

Diese Eigenschaft des Vierseits mit drei rechten Winkeln kann man aussprechen, indem man sagt:

Von zwei gegenüberliegenden Seiten eines Vierseits mit drei rechten Winkeln ist diejenige die kleinere, die dem stumpfen Winkel anliegt.

§ 50. Ein Lehrsatz über Projektion der Strecken. Es sei AOC ein beliebiger spitzer Winkel. Auf dem ersten Schenkel OA nehmen wir mehrere gleiche Strecken OA_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots$, aber von der Eigenschaft an, daß ihre Summe $OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots$ kleiner als eine Halbgerade ist. Von den Punkten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ fällen wir auf den Schenkel OC die Senkrechten, und es seien $C_1, C_2, C_3 \ldots$ ihre Fußpunkte. Die Strecken OC_1, OC_2, $OC_3 \ldots$, die rechtwinkligen Projektionen von OA_1, $OA_2 = 2\,OA_1$ $OA_3 = 3\,OA_1 \ldots$ genügen den Beziehungen

$$\text{(I)} \qquad OC_1 < \frac{OC_2}{2} < \frac{OC_3}{3} < \frac{OC_4}{4} \cdots,$$

während die Strecken A_1C_1, A_2C_2, $A_3C_3 \ldots$ den Beziehungen

$$\text{(II)} \quad A_1C_1 > \frac{A_2C_2}{2} > \frac{A_3C_3}{3} \cdots$$

genügen.

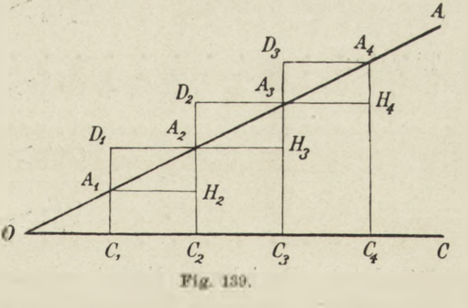


Fig. 139.

Wir fällen von $A_1, A_2, A_3 \ldots$ die Senkrechten A_1H_2, A_2H_3, $A_3H_4 \ldots$ beziehungsweise auf A_2C_2, A_3C_3, $A_4C_4 \ldots$; dann verlängern wir A_1C_1 um eine Strecke $A_1D_1 = A_1C_1$, ferner A_2C_2 um eine Strecke $A_2D_2 = A_2H_2$, weiter A_3C_3 um eine Strecke $A_3D_3 = A_3H_3$ usw. Verbindet man D_1 mit A_2, D_2 mit A_3, D_3 mit A_4 usw., so werden die

Dreiecke $A_1 D_1 A_2$, $A_2 D_2 A_3$, $A_3 D_3 A_4$ usw. bestimmt, die beziehungsweise den Dreiecken $O_1 A_1 C_1$, $A_1 H_2 A_2$, $A_2 H_3 A_3$ usw. gleich sind (1. Kriterium der Gleichheit).

Demgemäß haben wir die Streckengleichungen:

$$OC_1 = D_1 A_2,\ A_1 H_2 = D_2 A_3,\ A_2 H_3 = D_3 A_4 \ldots.$$

Aus dem in A_2 stumpfwinkligen Vierseit $D_1 C_1 C_2 A_2$ ergibt sich

$$D_1 A_2 < C_1 C_2; \quad D_1 C_1 > A_2 C_2,$$

oder:

$$OC_1 < C_1 C_2; \quad 2 A_1 C_1 > A_2 C_2,$$

und schließlich:

(1) $$OC_1 < \frac{OC_2}{2}; \quad A_1 C_1 > \frac{A_2 C_2}{2}.$$

Nachdem diese ersten beiden Beziehungen abgeleitet sind, gehen wir dazu über, den Winkel $O\widehat{A_2}C_2$ als grundlegenden Winkel anzusehen, und wenden auf ihn die in (1) enthaltenen Eigenschaften an. Wir werden, wenn wir z. B. die zweite anwenden, erhalten:

$$A_1 H_2 > \frac{OC_2}{2}$$

oder auch, wenn wir die Gleichheit von $A_1 H_2$ und $D_2 A_3$ in Rechnung ziehen:

$$D_2 A_3 > \frac{OC_2}{2}.$$

Aber aus dem dreifach rechtwinkligen Vierseit $C_2 C_3 A_3 D_2$ ergibt sich:

$$C_2 C_3 > D_2 A_3.$$

Kombiniert man diese Ungleichung mit der vorhergehenden, so ergibt sich hieraus:

$$C_2 C_3 > \frac{OC_2}{2},$$

hieraus:

$$C_2 C_3 + OC_2 > \frac{OC_2}{2} + OC_2,$$

$$OC_3 > \frac{3}{2} OC_2,$$

$$\frac{OC_3}{3} > \frac{OC_2}{2}.$$

Die letzte Beziehung liefert zusammen mit der ersten von (1) die folgende:

$$OC_1 < \frac{OC_2}{2} < \frac{OC_3}{3}.$$

In analoger Weise würde man, wenn man auf den Winkel $O\widehat{A_2}C_2$ die erste der beiden von (1) ausgedrückten Eigenschaften anwendet, zu der Ungleichung gelangen:

$$\frac{A_3C_3}{3} < \frac{A_2C_2}{2},$$

so daß wir, wenn wir uns die zweite Beziehung von (1) gegenwärtig halten, schreiben können:

$$(1') \qquad A_1C_1 > \frac{A_2C_2}{2} > \frac{A_3C_3}{3}.$$

Wenn man nach dieser Methode fortfährt, erhält man die Beziehungen (I) und (II), die zu beweisen wir uns vorgenommen hatten. Diese kann man, wenn man sich gegenwärtig hält, daß $OA_r = r\,OA_1$ ist, auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{OC_1}{OA_1} < \frac{OC_2}{OA_2} < \frac{OC_3}{OA_3} < \cdots$$

$$\frac{A_1C_1}{OA_1} > \frac{A_2C_2}{OA_2} > \frac{A_3C_3}{OA_3} > \cdots$$

Also: Wenn OA und OA' zwei kommensurabele Strecken sind, die kleiner als die Halbgerade sind und beide dem ersten Schenkel eines Winkels angehören, und wenn C, C' die Projektionen von A, A' auf den zweiten Schenkel bedeuten, so folgt unter der Voraussetzung $OA < OA'$:

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{OC}{OA} < \frac{OC'}{OA'};$$

$$(\mathrm{II}') \qquad \frac{AC}{OA} > \frac{A'C'}{OA'}.$$

Diese Ungleichungen kann man, wenn man alle vorhergehenden Voraussetzungen mit Ausnahme der der Kommensurabilität von OA und OA' aufrecht erhält, durch die bekannten auf die Lehre von den Grenzen gegründeten Schlußweisen auf den Fall übertragen, in dem OA und OA' zwei beliebige Strecken sind.

§ 51. Folgerungen des vorhergehenden Satzes. Aus (I′) und (II′) erhält man, wenn man Glied für Glied dividiert,

$$\frac{AC}{OC} > \frac{A'C'}{OC'}$$

und hieraus

$$\frac{OC'}{OC} > \frac{A'C'}{AC} \geqq 1.$$

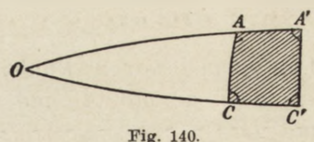


Fig. 140.

Die letzte Beziehung bedeutet unter Voraussetzung, daß OA' der Halbgeraden gleich ist:

Das Verhältnis zweier Gegenseiten eines Vierseits mit drei rechten Winkeln nähert sich dem Werte 1, wenn die Entfernung dieser beiden Seiten sich der Null nähert.

Zusatz. Der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{OC}{OA}$ ist 1, wenn sich der Winkel $\omega = \widehat{AOC}$ der Null nähert.

In der Tat, wenn P und Q die Punkte sind, in denen OC und OA die Polare von O treffen, so wird man haben:

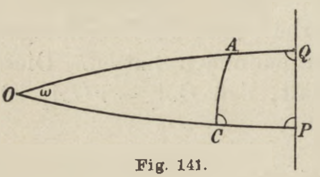


Fig. 141.

$$OP = OQ \geq OA.$$

Da ferner

$$\frac{CP}{AQ} = \frac{OP - OC}{OQ - OA} = \frac{OP - OC}{OP - OA}$$

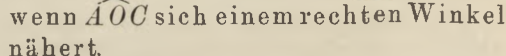
ist, so folgt

$$\lim_{PQ=0} \frac{CP}{AQ} = \lim_{\omega=0} \frac{OP - OC}{OP - OA} = 1$$

und daraus

$$\lim_{\omega=0} \frac{OC}{OA} = 1. \qquad \text{q. d. e.}$$

Lehrsatz. Wenn OA kleiner als der vierte Teil der ganzen Geraden ist, so ist der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{OC}{OA}$ gleich 0, wenn $\widehat{AOC}$ sich einem rechten Winkel nähert.



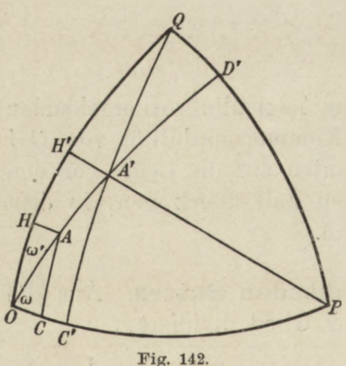


Fig. 142.

Es sei OPQ ein Dreieck mit drei rechten Winkeln und ω' ein beliebig kleiner Winkel. Man ziehe in dem Winkel QOP die Gerade OD' in der Weise, daß QOD' gleich ω' ist, und bezeichne mit ω den Winkel $D'OP$. Der Winkel ω nähert sich dem Rechten, wenn ω' sich der Null nähert und umgekehrt.

Auf OP nehme man die Strecke $OC' = OD'$ an und verbinde C' mit Q. Den gemeinsamen Punkt der beiden Geraden QC' und OD' bezeichne man mit A' und den gemeinsamen Punkt von OQ und PA' mit H'.

Da $OA' > OH'$[1]) ist, so hat man

$$\frac{OC'}{OA'} < \frac{OC'}{OH'}.$$

Und da, während ω' sich der Null nähert, die Strecke OH' fest bleibt, während ω sich einem Rechten und OC' sich der Null nähert, so folgt

$$\lim_{\omega = 1R} \frac{OC'}{OA'} = \lim_{\omega' = 0} \frac{OC'}{OH'} = 0.$$

Es sei nun A ein beliebiger Punkt der Strecke OA', C und H seine rechtwinkligen Projektionen auf OP und OQ. Wir wissen, daß

$$\frac{OC}{OA} < \frac{OC'}{OA'} \text{ ist.}$$

Geht man zur Grenze über, so erhält man, wenn ω sich einem Rechten nähert,

$$\lim_{\omega = R} \frac{OC}{OA} = 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

Zusatz. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Seiten kleiner als die Halbgerade sind, ist der Grenzwert des Verhältnisses zwischen einer Kathete und der Hypotenuse, wenn der der Kathete gegenüberliegende Winkel sich der Null nähert, gleich Null.

In der Tat hat man, wenn wir uns auf die vorhergehende Figur beziehen und in Rechnung ziehen, daß HA kleiner als OC ist:

$$\lim_{\omega' = 0} \frac{HA}{OA} \leqq \lim_{\omega' = 0} \frac{OC}{OA} = 0.$$

Wenn nun OA wächst, ohne die Länge der Halbgeraden zu überschreiten, so nimmt das Verhältnis $\frac{HA}{OA}$ ab, deshalb nähert sich das Verhältnis $\frac{HA}{OA}$, welches auch OA sei, wofern es nur nicht größer als die Halbgerade ist, der Null mit Annäherung des Winkels $\widehat{HOA}$ an Null. q. e. d.

§ 52. Kartesische und Polarkoordinaten. Die Funktion $f(\varrho, \alpha)$. Legt man die Halbgerade als Maßeinheit fest, so wird jeder Strecke eine Zahl zugeordnet, die wir Länge der Strecke nennen wollen. Die Länge einer Strecke, die kleiner als die Halbgerade ist,

1) In der Tat hat man in dem Vierseit $A'H'QD'$, in dem die Seiten kleiner als die Halbgerade und die Winkel $\widehat{H}'$, Q, $\widehat{D}'$ rechte sind, infolge des Lehrsatzes in § 49 $A'D' < H'Q$ und hieraus folgt, da $OQ = OD'$ ist, $OA' > OH'$.

ist kleiner als 1; die Länge einer Strecke, die der Halbgeraden gleich ist, ist die Zahl 1; die Länge einer Strecke, die größer als die Halbgerade ist, ist größer als 1; die Länge der ganzen Geraden ist 2.

Als Maßeinheit der Winkel wollen wir den rechten Winkel annehmen. Alsdann ist die Weite eines Winkels gleich der Länge seiner zugeordneten Strecke (vergl. § 44); das Messen der Winkel kann also auf das der zugeordneten Strecken zurückgeführt werden.

Der Länge einer Strecke kann das Zeichen + oder das Zeichen — zugeordnet werden.

Legt man auf einer Geraden, der eine bestimmte Strecke angehört, einen positiven Sinn fest, so soll der Strecke AB das Vorzeichen + vorangehen, wenn der Punkt B auf A im positiven Sinne folgt, das Vorzeichen —, wenn B dem Punkte A, immer in demselben Sinne, vorangeht.

Es sei O ein beliebiger Punkt der Ebene; um ihn herum grenzen wir ein beschränktes (normiertes) Gebiet ab, z. B. das der inneren Punkte eines Kreises mit dem Mittelpunkte O und einem Radius, der kleiner als die Halbgerade ist; wir ziehen dann durch O zwei senkrechte Achsen X, Y, und es sei auf jeder von ihnen eine Richtung als die positive festgelegt. Von einem beliebigen Punkte M unseres Gebietes fällen wir die Senkrechte auf die Achse X: Die Längen von OP und MP sind nach Wert und Vorzeichen die rechtwinkligen Kartesianischen Koordinaten von M, sie sollen stets mit x und y bezeichnet werden. Die absolute Länge ϱ der Strecke OM und der Winkel $\alpha = \widehat{POM}$ sind die Polarkoordinaten desselben Punktes.

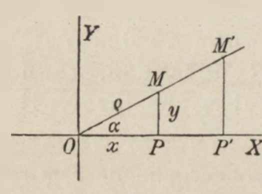


Fig. 143.

Wir setzen:

$$f(\varrho, \alpha) = \frac{x}{\varrho}. \tag{1}$$

Im euklidischen Falle weiß man, daß die so definierte Funktion $f(\varrho, \alpha)$ von ϱ unabhängig ist und mit $\cos \alpha$ zusammenfällt; im vorliegenden Falle hängt sie von ϱ und α ab. Wir nehmen uns vor, ihre Änderungen (Variationen) zu untersuchen.

Wir bemerken vor allem, daß sie allein für Werte von ϱ definiert ist, die größer als Null und kleiner als 1 sind. Für ϱ, die größer oder gleich 1 sind, würde man die Funktion in der neuen Umgebung auch definieren können, aber das interessiert uns nicht; für $\varrho = 0$, ein Fall, der uns interessiert, genügt (1) nicht, weil das Verhältnis $\frac{x}{\varrho}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Indem wir die Definition von $f(\varrho, \alpha)$ für $\varrho = 0$ uns für später vorbehalten, weisen wir auf die folgenden Beziehungen hin:

$$f(\varrho, 0) = 1,\ f(\varrho, 1) = 0,\ f(\varrho, 2) = -1.$$

Außerdem hat man:

(1) $$-1 \leq f(\varrho, \alpha) \leq 1.$$

Die in § 50 für die Änderungen des Verhältnisses $\frac{x}{\varrho}$ festgestellten Eigenschaften gestatten uns zu behaupten, daß für ein konstantes α der absolute Wert von $f(\varrho, \alpha)$ mit ϱ wächst.

Hieraus folgt, daß es für ein festgehaltenes α einen bestimmten endlichen Grenzwert für $f(\varrho, \alpha)$ gibt, wenn ϱ sich der Null nähert.

Dieser Grenzwert ist infolge von (1) eine Zahl, die zwischen $+1$ und -1 liegt.

Wir bestimmen nun $f(\varrho, \alpha)$ für $\varrho = 0$.

Bei festgelegtem α wollen wir den Wert von $f(\varrho, \alpha)$ für $\varrho = 0$ nennen den Grenzwert der Werte der Funktion bei Annäherung von ϱ an 0. Wir werden also setzen:

$$f(0, \alpha) = \lim_{\varrho = 0} f(\varrho, \alpha).$$

Der Ausdruck $f(0, \alpha)$ soll im folgenden kurz mit $f(\alpha)$ bezeichnet werden.

Die Funktion $f(\varrho, \alpha)$ ist so für alle Wertepaare ϱ, α definiert, die den Punkten des angenommenen begrenzten Gebietes entsprechen, und ihre Werte liegen stets zwischen $+1$ und -1.

§ 53. Stetigkeit der Funktion $f(\varrho, \alpha)$. Die Funktion ist offenbar stetig für alle Wertepaare ϱ, α, für die $\varrho > 0$ ist.

Um zu beweisen, daß sie auch für $\varrho = 0$ und für ein beliebiges ϱ stetig ist, betrachten wir den Zuwachs, den man erhält, wenn α um $\Delta\alpha$ wächst.

Beziehen wir uns auf die beigefügte Figur und betrachten wir die Strecken, die in den folgenden Beziehungen auftreten, als absolute Größen, so werden wir haben

$$|f(\varrho, \alpha + \Delta\alpha) - f(\varrho, \alpha)| = \frac{P'P}{OM}.$$

Fig. 144.

Wenn H der Fußpunkt des von M auf $M'P'$ gefällten Lotes und K die Mitte von MM' ist, so besteht die Identität:

$$\frac{P'P}{OM} = \frac{P'P}{HM} \cdot \frac{HM}{M'M} \cdot \frac{2\,M'K}{OM}.$$

Aber HM ist kleiner als MM', also

$$|f(\varrho, \alpha + \Delta\alpha) - f(\varrho, \alpha)| < 2 \frac{P'P}{HM} \cdot \frac{M'K}{OM}.$$

Gehen wir zur Grenze über, wenn $\Delta\alpha$ und ϱ sich in beliebiger Weise der Null nähern, und ziehen wir die in § 51 bewiesenen Sätze in Rechnung, so erhält man:

$$\lim_{\substack{\varrho = 0 \\ \Delta\alpha = 0}} |f(\varrho, \alpha + \Delta\alpha) - f(\varrho, \alpha)| = 0,$$

d. h.

$$\lim_{\varrho,\ \Delta\alpha = 0} f(\varrho, \alpha + \Delta\alpha) = f(0, \alpha).$$

Die Funktion $f(\varrho, \alpha)$ ist also auch für $\varrho = 0$ stetig.

Die vorhergehende Gleichung kann auch folgendermaßen geschrieben werden.

$$\lim_{\alpha' = \alpha} f(\alpha') = f(\alpha).$$

§ 54. Eigenschaften der Funktion $f(\alpha)$. Wenn wir zur grundlegenden Figur zurückkehren, so bemerken wir, daß der Winkel $\beta' = \widehat{OMP}$, wenn M sich dem Punkte O auf dem Radius nähert, den Winkel $\widehat{MOY}$ zur Grenze hat. Also:

$$\lim_{\varrho = 0} \frac{y}{\varrho} = \lim_{\varrho = 0} f(\varrho, \beta') = f(0, \beta) = f(\beta).$$

Fig. 145.

Nachdem dies festgestellt ist, ziehen wir durch M die Senkrechte auf OM. Bezeichnen wir mit H und K die Punkte, in denen sie die Achsen X und Y schneidet, und mit β'', α'' die Winkel, die sie mit den Achsen bildet, so werden wir folgende Identität schreiben können:

$$1 = \frac{KM}{KH} + \frac{MH}{KH} = \frac{KM}{OK} \cdot \frac{OK}{KH} + \frac{MH}{OH} \cdot \frac{OH}{KH},$$

oder, wenn wir ϱ', u, v die Längen von KH, OK, OH nennen,

$$1 = f(u, \alpha'') \cdot f(\varrho', \alpha'') + f(v, \beta'') \cdot f(\varrho', \beta'').$$

Lassen wir ϱ sich der Null nähern, während wir α konstant und HK senkrecht auf OM erhalten, so nähern sich auch u, v, ϱ' der

Null, α'', β'' nähern sich α und β, und die letzte Gleichung gibt die Grenzbeziehung:

(1) $$1 = f^2(\alpha) + f^2(\beta).$$

Wenn man noch beachtet, daß $\alpha + \beta = 1$ ist, werden wir schreiben können:

(1') $$f^2(\alpha) + f^2(1-\alpha) = 1.$$

Diese Formel gilt, obgleich ausdrücklich nur für den Fall $\alpha < 1$ bewiesen, auch für $\alpha \geq 1$. Das bestätigt sich, wenn man auch in diesem Falle von demselben oben entwickelten Schlußverfahren Gebrauch macht.

Folgendes sind einige wichtige Folgerungen, die sich aus (1) ergeben:

a) Die Funktion $f(\alpha)$ ist nur für $\alpha = 1$ Null. In der Tat, da $\alpha + \beta = 1$ ist, so gibt (1) für $f(\alpha) = 0$ die Gleichung $f(\beta) = 1$ und ebenso $\beta = 0$, $\alpha = 1$.

b) Das Verhältnis $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$, in dem $\alpha + \beta = 1$, ist endlich und von 0 verschieden für alle von Null, Eins, Zwei verschiedenen α.

c) Wenn $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, so hat man

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

§ 55. Eigenschaften unendlich kleiner rechtwinkliger Dreiecke. Es sei ABC ein in C rechtwinkliges Dreieck. Indem wir wie gewöhnlich seine Seiten mit a, b, c und seine Winkel mit α, β, γ bezeichnen, bilden wir die Verhältnisse:

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}.$$

Wir lassen dann das Dreieck sich ändern, indem wir α festhalten und das Dreieck rechtwinklig erhalten. Wenn die Hypotenuse sich der Null nähert, nähert sich der Winkel β dem Werte $1 - \alpha$, so daß

$$\lim_{c=0} \frac{b}{c} = f(\alpha),\quad \lim_{c=0} \frac{a}{c} = f(1-\alpha)$$

ist.

Erhebt man ins Quadrat und addiert, so ergibt sich

$$\lim_{c=0} \left[\frac{a^2+b^2}{c^2}\right] = f^2(\alpha) + f^2(1-\alpha) = 1,$$

oder auch, wenn man mit ω eine passende stetige Funktion von c bezeichnet, die sich mit c der Null nähert:

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1 + \omega,$$

d. h.

$$a^2 + b^2 = c^2 + \omega c^2.$$

Die Beziehung beweist, daß in unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecken unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen, die höherer als zweiter Ordnung sind, der gewöhnliche Lehrsatz von Pythagoras gilt.

§ 56. Funktionalgleichung für $f(\alpha)$. Um die Funktionalgleichung von $f(\alpha)$ zu erhalten, betrachten wir außer der Geraden, die mit X den Winkel α bildet, die beiden Geraden OA und OB, die mit der Achse beziehungsweise die Winkel $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ bilden. Es seien A und B die Schnittpunkte von OA und OB mit der Senkrechten MH auf OM und A', B', M' die Fußpunkte der von A, B, M auf X gefällten Senkrechten. Aus der Figur ergibt sich die Identität:

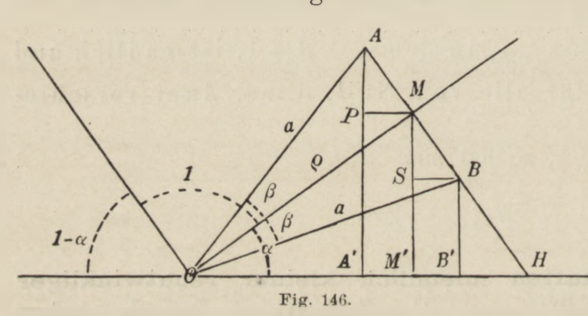


Fig. 146.

$$\frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} = \frac{OM'}{OA} - \frac{A'M'}{OA} + \frac{OM'}{OB} + \frac{M'B}{OB},$$

aus der man, da $OA = OB$ ist, folgert:

$$\frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} = 2\frac{OM'}{OA} - \left(\frac{A'M'}{OA} - \frac{M'B'}{OB}\right) = 2\frac{OM'}{OM}\cdot\frac{OM}{OA} - \left(\frac{AM'}{OA} - \frac{M'B'}{OB}\right).$$

Setzt man:

$$\varrho = OM,\ a = OA = OB,\ \delta = \frac{A'M'}{OA} - \frac{M'B'}{OB},$$

so nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an:

$$f(a, \alpha + \beta) + f(a, \alpha - \beta) = 2f(\varrho, \alpha)\cdot f(\varrho, \beta) - \delta.$$

Wir lassen nun ϱ sich der Null nähern, während wir AB zu

OM senkrecht erhalten. Da die Grenze von δ Null ist[1]), so gibt uns die letzte Gleichung die Grenzbeziehung:

(1) $$f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=2f(\alpha)\cdot f(\beta),$$

die gerade die verlangte Funktionalgleichung ist.

§ 57. Integration der Funktionalgleichung. Die Kreisfunktion $\cos\alpha$ ist sicher ein Integral von (1), weil man hat:

(1′) $$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

Setzen wir außerdem voraus, daß man als Maßeinheit für die Bogen den Quadranten festgesetzt hat, so werden wir haben:

$\cos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, deshalb (vgl. § 54)

$$f(1)=\cos(1)$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\cos\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Wenn wir von diesen den Funktionen $f(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ gemeinsamen Werten ausgehen, so können wir die Werte der beiden Funktionen für alle Argumente von dem Typus $\frac{1}{2^n}$ berechnen und nachweisen, daß $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=\cos\frac{1}{2^n}$ ist. In der Tat erhält man, wenn wir in (1) und (1′) das Argument β gleich α setzen:

(2) $$\begin{cases} f(2\alpha)+1=2f^2(\alpha) \\ \cos(2\alpha)+1=2\cos^2(\alpha) \end{cases}.$$

1) In der Tat hat man identisch:

$$\delta=\frac{A'M'}{OA}-\frac{M'B'}{OB}=\left(\frac{A'M'}{AM}-\frac{M'B'}{MB}\right)\frac{MB}{OB}$$

Andererseits erhält man, wenn man von M und B die Lote MP und BS auf AA' und MM' fällt:

$$\frac{A'M'}{AM}=\frac{A'M'}{PM}\cdot\frac{PM}{AM};\quad \frac{M'B'}{MB}=\frac{M'B'}{SB}\cdot\frac{SB}{MB}.$$

Wenn sich ϱ der Null nähert, nähern sich die beiden Verhältnisse $\frac{A'M'}{PM}$, $\frac{M'B'}{SB}$ gleichzeitig der Einheit (vgl. § 51), während die Winkel $\widehat{AMP}$, $\widehat{MBS}$ sich dem Winkel $\gamma=1-\alpha$ nähern. Wir werden deshalb haben:

$$\lim_{\varrho=0}\frac{A'M'}{AM}=f(\gamma),\quad \lim_{\varrho=0}\frac{M'B'}{MB}=f(\gamma).$$

Andererseits ergibt sich, da $\frac{MB}{OB}<1$ ist, $\lim_{\varrho=0}\delta=0$.

Diese Gleichungen geben für $\alpha = \frac{1}{2^2}$:

$$f\left(\frac{1}{2^2}\right) = \cos\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Nachdem man den Wert der Funktionen für $\alpha = \frac{1}{2^2}$ erhalten hat, so ergibt sich, wenn man in (2) $\alpha = \frac{1}{2^3}$ setzt:

$$f\left(\frac{1}{2^3}\right) = \cos\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

und so fort. Also ist:

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\frac{1}{2^n}.$$

Wir können nun beweisen, daß die beiden Funktionen $f(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für alle Argumente von dem Typus $\frac{m}{2^n}$ identisch sind, wo m und n beliebige ganze positive Zahlen sind.

In der Tat ergibt sich, wenn man in (1) und (1′):

$$\alpha = (m-1)\beta \quad \text{setzt:}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} f(m\beta) + f([m-2]\beta) = 2f(\beta)f([m-1]\beta) \\ \cos m\beta + \cos(m-2)\beta = 2\cos\beta\cos(m-1)\beta. \end{cases}$$

Diese rekurrierenden Formeln gestatten, nach und nach $f(2\beta)$, $f(3\beta)$, ..., $\cos 2\beta$, $\cos 3\beta$, ... zu berechnen, sobald man $f(\beta)$ und $\cos\beta$ kennt.

Und da die Operationen, die man an $f(\beta)$ auszuführen hat, um nach und nach $f(2\beta)$, $f(3\beta)$, ... zu berechnen, mit denen identisch sind, die man braucht, um aus $\cos\beta$ die Werte von $\cos 2\beta$, $\cos 3\beta$, ... zu erhalten, so wird, wenn $f(\beta) = \cos\beta$ ist, auch sein:

$$f(m\beta) = \cos m\beta.$$

Aber für $\beta = \frac{1}{2^n}$ hat man tatsächlich die Gleichung:

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\frac{1}{2^n};$$

also:

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \cos\frac{m}{2^n}.$$

Um endlich festzustellen, daß die Funktionen $f(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für beliebige Werte von α identisch sind, genügt es, die Stetigkeit dieser Funktionen und die Tatsache heranzuziehen, daß jeder Wert von α immer als die Grenze einer Folge von Zahlen vom Typus $\frac{m}{2^n}$ angesehen werden kann.

Wir werden demgemäß schließen:

$$f(\alpha) = \cos \alpha.$$

Natürlich muß hier die Funktion $\cos \alpha$ vermittels ihres analytischen Ausdrucks eingeführt werden. Bezeichnet man mit a die Länge des Bogens α, wenn man die Maßeinheit in der Weise wählt, daß der Quadrant zur Länge $\frac{\pi}{2}$ hat, so hat man:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \cdots,$$

deshalb:

$$f(\alpha) = \cos \alpha = 1 - \frac{2^2 \cdot \alpha^2}{\pi^2 \cdot 2!} + \frac{2^4 \cdot \alpha^4}{\pi^4 \cdot 4!} - \frac{2^6 \cdot \alpha^6}{\pi^6 \cdot 6!} + \cdots.$$

§ 58. Anwendungen auf unendlich kleine rechtwinklige Dreiecke. Bilden wir das Verhältnis zwischen den Katheten a und b und der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, gehen dann, wenn c sich der Null nähert, zur Grenze über, so werden wir, wenn wir mit α' und β' die Grenzen bezeichnen, denen sich die Dreieckswinkel α und β nähern, haben:

$$\lim_{c=0} \frac{a}{c} = \cos \beta',$$

$$\lim_{c=0} \frac{b}{c} = \cos \alpha'.$$

Und da α' und β' Komplementwinkel sind, werden wir auch schreiben können:

$$\lim \frac{a}{c} = \sin \alpha',$$

$$\lim \frac{b}{c} = \sin \beta'.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\lim_{c=0} \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{ctg} \beta'.$$

Diese Ergebnisse pflegt man auszudrücken, indem man sagt: „In unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecken gelten die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln.“ Also: „In der unendlich kleinen Umgebung eines Punktes der elliptischen Ebene ist die euklidische Geometrie gültig.“

§ 59. Trigonometrie des Bündels. Es sei $O(abc)$ eine längs der Kante c rechtwinklige dreiseitige Ecke in dem Bündel mit dem

Mittelpunkte O. Wir bezeichnen mit $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ die Neigungswinkel der Flächenwinkel und mit α, β, γ die genüberliegenden Seiten. Nachdem auf b ein Punkt B bestimmt ist, fällen wir die Senkrechten BC und BA auf c und a. Das rechtwinklige Dreieck ABC, das man so erhält, hat in A einen Winkel, der dem Neigungswinkel des Flächenwinkels a gleich ist. Aus den Eigenschaften der Figur ergeben sich die folgenden Identitäten:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BC}{OB} \cdot \frac{OB}{BA} = \frac{BC}{OB} : \frac{BA}{OB},$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{OC} \cdot \frac{OC}{OB} : \frac{AB}{OB}.$$

Fig. 147.

Wir denken uns nun, daß sich der Punkt B dem Punkte O nähert, während die Ebene ABC immer zu a senkrecht erhalten wird. Alsdann führen die beiden Identitäten auf die Grenzbeziehungen:

$$\lim \frac{BC}{BA} = \lim \frac{BC}{OB} : \lim \frac{BA}{BO},$$

$$\lim \frac{AC}{AB} = \lim \frac{AC}{OC} \cdot \lim \frac{OC}{OB} : \lim \frac{AB}{OB}$$

oder:

$$\sin \widehat{A} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

Die ganze Trigonometrie des Bündels kann aus diesen Formeln durch Verfahrungsweisen abgeleitet werden, die von denen, die man gewöhnlich für den Aufbau der sphärischen Trigonometrie anwendet, nicht verschieden sind.

Wir können demgemäß die bezüglichen Rechnungen übergehen und schließen:

„Die Trigonometrie des Bündels des elliptischen Raumes ist mit der Trigonometrie des eigentlichen Bündels des euklidischen Raumes identisch.“

§ 60. Sphärische Trigonometrie. Wir denken uns eine Kugel und ein konzentrisches Bündel und kommen überein, zu nennen: Länge eines Bogens eines größten Kreises die Weite des entsprechenden Winkels im Bündel, Winkel zweier Bogen den Winkel der bezüglichen Tangenten in ihrem gemeinsamen Punkte. Alsdann ist klar, daß die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks mit denen der entsprechenden dreiseitigen Ecke

übereinstimmen werden, sodaß wir den folgenden Lehrsatz werden aussprechen können.

„Die sphärische Trigonometrie im elliptischen Raume ist mit der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie identisch, vorausgesetzt, daß man im gewöhnlichen Raume als Maß für die Seiten der sphärischen Dreiecke das Maß der entsprechenden Winkel im Mittelpunkte nimmt.

§ 61. Ebene Trigonometrie. Die elliptische Ebene ist eine Kugel mit einem Radius, der der Halbgeraden gleich ist; und da wir als Maßeinheit für die Strecken die Halbgerade und als Maßeinheit für die Winkel den rechten Winkel gewählt haben, so sind die trigonometrischen Beziehungen für die ebenen Dreiecke identisch mit denen der entsprechenden dreiseitigen Ecken (Trieder) des Bündels, das den Mittelpunkt in dem Punkte hat, in dem alle auf der Ebene senkrecht stehende Geraden zusammenlaufen.

Wenn man anstatt der Halbgeraden als Maßeinheit eine Strecke annehmen wollte, für welche die Länge der Halbgeraden k (Parameter) wäre, so würden wir zwischen den Maßen a und a' ein und derselben Strecke, auf die eine und die andere Einheit bezogen, die Beziehung haben:

$$a = \frac{a'}{k}.$$

Ersetzen wir also in den in Frage stehenden trigonometrischen Formeln die Längen a, b, c der Seiten eines Dreiecks bezüglich durch $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$, so werden wir die Trigonometrie der elliptischen Ebene erhalten, wenn die Maßeinheit in der Weise gewählt wird, daß sich die Länge der ganzen Geraden als $2k$ ergibt.

Die neuen Formeln sind mit denen identisch, die sich auf eine euklidische Kugel mit dem Radius k beziehen, und unterscheiden sich von denen der hyperbolischen Geometrie dadurch, daß an die Stelle der hyperbolischen Funktionen die Kreisfunktionen getreten sind.

Auch hier kann man wiederholen, was in § 40 gesagt wurde, wo wir von der hyperbolischen Geometrie sprachen.

Wenn der Parameter k der elliptischen Geometrie so groß sein sollte, daß die Fehler, die man begeht, wenn man ihn als unendlich groß ansieht, kleiner werden als diejenigen, die mit dem experimentellen Verfahren (den Messungen) verbunden sind, so würde die elliptische Ebene durch eine euklidische Ebene ersetzt werden können.

Druckfehler und Zusätze.

S. 38 Z. 3 v. o. lies Modena statt Bologna.
„ 40 „ 23 v. u. ist hinter „Linie" hinzuzufügen „als Länge ohne Breite" (Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές).
„ 98 „ 3 v. o. lies Prato statt Lodi.
„ 129 „ 3 v. o. „ Genua „ Pisa.
„ 194 ist nach dem Schluß von § 11 folgender Zusatz hinzuzufügen:

11 a. Die oben angegebenen Beispiele lassen erkennen, daß aus der Voraussetzung der Volumengleichheit für zwei Polyeder durchaus nicht folgt, daß für sie der Fundamentalgleichung von Dehn genügt ist; diese ist vielmehr die notwendige Bedingung dafür, daß die beiden betrachteten Polyeder in kongruente polyederartige Teile zerlegbar sind. Es ist also in der Tat erwiesen, daß für die Polyeder (im Unterschied zu dem, was für die Polygone der Fall ist) die Gleichheit der Größe (oder des Volumens) eine allgemeinere Beziehung ist als die der Äquivalenz oder der Zerlegbarkeit in Teile, die miteinander zur Deckung gebracht werden können.

Betrachtet man nun alle Polyeder, die mit einem bestimmten Polyeder, z. B. mit dem Einheitswürfel, gleiches Volumen haben, so können wir sie in viele Kategorien oder Typen klassifizieren, indem man verschiedenen Typen die Polyeder zuweist, die nicht in kongruente Teile zerlegbar sind, und in einen und denselben Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder alle Polyeder einschließt, die mit diesem äquivalent sind. Dehn hat darauf aufmerksam gemacht[1]), aus den vorangehenden Schlüssen von ihm folge, daß die Gesamtheit dieser Typen nicht abzählbar ist, d. h. nicht mit der Gesamtheit der ganzen Zahlen oder, was dasselbe ist, mit der Gesamtheit der rationalen Punkte der Abszisse zwischen dem Koordinatenanfang und dem Einheitspunkte in eine gegenseitig eindeutige Korrespondenz gesetzt werden kann.

Aber so interessant diese Bemerkung ist, so fügt sie doch nur wenig zu den kargen Notizen hinzu, die wir über den Gegenstand besitzen.

Man weiß, daß jedem Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder auch das zu ihm (in bezug auf einen Punkt) symmetrische Polyeder gehört, da zwei symmetrische Polyeder immer in kongruente Teile zerlegt werden können.[2]) Man weiß außerdem aus den Elementen der Geometrie, daß alle Prismen (vom Volumen 1) demselben Typus angehören, da zwei Prismen von der Eigenschaft, daß keins von beiden ein größeres Volumen hat als

---

1) Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie. Math. Annalen Bd. LIX. 1904.

2) Diese Tatsache, die mit sehr bekannten Eigenschaften der sphärischen Polygone zusammenhängt, wurde, soviel ich weiß, zuerst von Gerling bemerkt in der Antwort auf einen der zu Beginn angeführten Briefe von Gauß (Gauß Werke, Bd. 8 S. 242).

Druckfehler und Zusätze.

S. 38 Z. 3 v. o. lies Modena statt Bologna.

„ 40 „ 23 v. u. ist hinter „Linie“ hinzuzufügen „als Länge ohne Breite“ (Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές).

„ 98 „ 3 v. o. lies Prato statt Lodi.

„ 129 „ 3 v. o. „ Genua „ Pisa.

„ 194 ist nach dem Schluß von § 11 folgender Zusatz hinzuzufügen:

11 a. Die oben angegebenen Beispiele lassen erkennen, daß aus der Voraussetzung der Volumengleichheit für zwei Polyeder durchaus nicht folgt, daß für sie der Fundamentalgleichung von Dehn genügt ist; diese ist vielmehr die notwendige Bedingung dafür, daß die beiden betrachteten Polyeder in kongruente polyederartige Teile zerlegbar sind. Es ist also in der Tat erwiesen, daß für die Polyeder (im Unterschied zu dem, was für die Polygone der Fall ist) die Gleichheit der Größe (oder des Volumens) eine allgemeinere Beziehung ist als die der Äquivalenz oder der Zerlegbarkeit in Teile, die miteinander zur Deckung gebracht werden können.

Betrachtet man nun alle Polyeder, die mit einem bestimmten Polyeder, z. B. mit dem Einheitswürfel, gleiches Volumen haben, so können wir sie in viele Kategorien oder Typen klassifizieren, indem man verschiedenen Typen die Polyeder zuweist, die nicht in kongruente Teile zerlegbar sind, und in einen und denselben Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder alle Polyeder einschließt, die mit diesem äquivalent sind. Dehn hat darauf aufmerksam gemacht[1]), aus den vorangehenden Schlüssen von ihm folge, daß die Gesamtheit dieser Typen nicht abzählbar ist, d. h. nicht mit der Gesamtheit der ganzen Zahlen oder, was dasselbe ist, mit der Gesamtheit der rationalen Punkte der Abszisse zwischen dem Koordinatenanfang und dem Einheitspunkte in eine gegenseitig eindeutige Korrespondenz gesetzt werden kann.

Aber so interessant diese Bemerkung ist, so fügt sie doch nur wenig zu den kargen Notizen hinzu, die wir über den Gegenstand besitzen.

Man weiß, daß jedem Typus zusammen mit einem bestimmten Polyeder auch das zu ihm (in bezug auf einen Punkt) symmetrische Polyeder gehört, da zwei symmetrische Polyeder immer in kongruente Teile zerlegt werden können.[2]) Man weiß außerdem aus den Elementen der Geometrie, daß alle Prismen (vom Volumen 1) demselben Typus angehören, da zwei Prismen von der Eigenschaft, daß keins von beiden ein größeres Volumen hat als

1) Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie. Math. Annalen Bd. LIX. 1904.

2) Diese Tatsache, die mit sehr bekannten Eigenschaften der sphärischen Polygone zusammenhängt, wurde, soviel ich weiß, zuerst von Gerling bemerkt in der Antwort auf einen der zu Beginn angeführten Briefe von Gauß (Gauß Werke, Bd. 8 S. 242).

das andere, äquivalent d. h. in kongruente Teile zerlegbar sind.[1]) Aber schon in diesem Typus, dem alle Prismen angehören, treten auch andere Polyeder auf, da Hill[2]) die Äquivalenz (Zerlegbarkeit in kongruente Teile) mit Prismen für Tetraeder einer gewissen Kategorie bemerkt hat, die für ein vorher bestimmtes Volumen, z. B. für das Volumen 1, auch von einem willkürlichen Werte eines Winkels abhängen. Wie Vogt[3]) bemerkt hat, sind dies die Tetraeder, die man in der Zahl sechs aus jedem Rhomboeder (Parallelepipedon mit gleichen Kanten erhält, wenn man durch die Hauptdiagonale die Ebenen legt, welche die sechs diese Diagonale treffenden Kanten projizieren. So hat Juel[4]) auf die Äquivalenz mit einem Würfel für jede der sechs gleichen Pyramiden hingewiesen, welche die Seitenflächen eines Würfels zu Grundflächen und seinen Mittelpunkt zur gemeinsamen Spitze haben.[5])

Außer den Tetraedern von Hill und der Pyramide von Juel kennt man keine anderen pyramidenartigen Polyeder, die mit Prismen äquivalent sind; und es wäre sicher wünschenswert, wenn in dieser Ideenrichtung durch die Arbeit derer, welche die elementare Geometrie pflegen, ein Material gesammelt werden könnte, das reicher an besonderen Ergebnissen wäre. Vielleicht würde man so einen Hinweis für den Weg erhalten, den man einschlagen muß, um das Problem in Angriff zu nehmen, das noch gänzlich ungelöst ist und sehr schwierig erscheint, nämlich das Problem, die hinreichende Bedingung dafür aufzustellen, daß zwei Polyeder in gleiche Teile zerlegbar sind.

Hinsichtlich dieses Punktes können wir nur aussagen, daß für diesen Zweck sicher nicht eine einfache Umkehrung des Ergebnisses von Dehn genügt. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man zwei beliebige gerade Prismen P und P', welche dieselbe Höhe haben, und bezeichne mit $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ und $\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_m'$ die Neigungswinkel der Flächenwinkel der Seiten (d. h. die Winkel der bezüglichen Grundflächen). Das System (S) aller linearen homogenen Beziehungen mit ganzen Koeffizienten, die zwischen den Kanten der beiden Prismen bestehen, wird vor allem das System (S_1) der

1) Vgl. z. B. Enriques-Amaldi, *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole secondarie superiori, 4. Aufl. 1910.

2) Determination of the volumes of certain Species of Tetrahedra. Proceedings of the London Society.

3) Man vergleiche das erwähnte *Breslauer Programm*, das noch andere interessante Betrachtungen über Zerlegungen von Polyedern in Teile enthält, mit denen wir uns hier nicht beschäftigen können.

4) *Über das Volumen der Pyramide*: Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 15, 1904. Vgl. die Note desselben Verfassers: Egalité par addition de quelques polyèdres. Berichte der K. Gesell. der Wiss. zu Kopenhagen, 1903. — In der ersten dieser Noten ist angegeben, daß in Göttingen auf Anregung von F. Schur Modelle für die Zerlegung eines Tetraeders von Hill in Teile konstruiert worden sind, aus denen man ein dreiseitiges Prisma herstellen kann, das dieselbe Basis hat, während die Höhe einem Drittel der Höhe des Tetraeders gleich und die Seitenkanten einer Seitenkante des Tetraeders parallel sind

5) H. Vogt bemerkt in dem angeführten Programm, daß der achte Teil der Pyramide von Juel ein besonderes Tetraeder von Hill ist.

Gleichungen zwischen allen Seitenkanten der beiden Prismen enthalten, auf alle möglichen Weisen zu je zwei und zwei genommen; und außerdem wird es eventuell andere Gleichungen (S_2) umfassen, in denen die Kanten der Grundflächen auftreten. Jedenfalls werden in jeder ganzzahligen Lösung des Systems (S) die den Seitenkanten entsprechenden Zahlen sämtlich gleich sein; weiß man also, daß die auf alle anderen Kanten bezüglichen Flächenwinkel rechte sind, so folgt für die beiden Ausdrücke, von denen man auf Grund des Satzes von Dehn nachweisen muß, daß sie für den Modul π kongruent sind, daß sie, wie auch die ganzzahlige Lösung des betrachteten Systems (S) beschaffen sei, als zwei gleiche Vielfache der beiden Summen $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n$ und $\pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_m'$ gegeben sind, jedes vermehrt um ein bestimmtes Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$. Aber jede dieser beiden Summen ist bekanntlich einem Vielfachen von π gleich; hieraus folgt, daß die beiden Prismen P und P' die Bedingung von Dehn erfüllen, sie mögen einander äquivalent sein oder nicht.[1])

Schließlich bleibt uns noch zu bemerken, daß die vorangehende Betrachtung, die sich auf das System der geraden Prismen bezieht, die eine bestimmte Höhe haben, im wesentlichen nur die Schlüsse von Dehn auf die vieleckigen Flächen (Polygone) überträgt; und da für diese, wie wir soeben gesehen haben, die Bedingung in jedem Falle gilt, unabhängig von jeder Voraussetzung bezüglich ihrer Äquivalenz, so ergibt sich, daß das Band, daß für die Polyeder zwischen ihrer Zerlegbarkeit in kongruente Teile und der Bedingung von Dehn besteht, einen Zufälligkeitscharakter besitzt. Eine kritische Untersuchung, die darauf gerichtet wäre, vermittels grundlegender Hypothesen den Ursprung für diese Charakterverschiedenheit zwischen den geometrischen Größen der Ebene und des Raumes genau festzustellen, würde sicher von großem Interesse sein.

S. 268, Z. 22 lies $\cos A \cos\pi(b) \cos\pi(c) + \frac{\sin\pi(b)\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)} = 1$

statt $\cos A = \cos\pi(b)\cos\pi(c) + \frac{\sin\pi(b)\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)} - 1$,

S. 276, Z. 13 lies mit dem Radius $\sqrt{\frac{1}{c}}$ statt mit des Radius $\sqrt{c}$,

S. 290, letzte Zeile lies $\mathrm{Sh}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$ statt $\mathrm{Sh}\left[\frac{\log a}{2}\right] = \frac{a-1}{i\,2\sqrt{a}}$.

1) Die vorstehende Erörterung schließt übrigens nicht aus, daß die Bedingung von Dehn für die Äquivalenz ausreichend sein kann, wenn man zu ihr die Voraussetzung der Volumengleichheit hinzunimmt.

